63

Lehrbuch

der

Buchstabenrechnung und Algebra

für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß,
Kgl. Seminarlehrer.

Zweiter Teil:

Logarithmen, Exponentialgleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, mit vielen Übungsaufgaben.

Nürnberg,
Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.
1884.

Lehrbuch

der

Buchstabenrechnung und Algebra

für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß,
Kgl. Seminarlehrer.

Zweiter Teil:

Logarithmen, Exponentialgleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, mit vielen Übungsaufgaben.

Nürnberg.
Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.
1884.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Vorwort.

In dem vorliegenden zweiten Teil meines Lehrbuches der Buchstabenrechnung und Algebra werden die Logarithmen, die Exponentialgleichungen und die arithmetischen und geometrischen Progressionen behandelt. Um das Studium dieser interessanten und auch praktisch äußerst wichtigen mathematischen Disciplinen zu erleichtern, habe ich die Gesetze und Regeln derselben möglichst übersichtlich angeordnet, sie in leichtfaßlicher und eingehender Weise dargestellt und begründet, und ihre praktische Verwertung an einer großen Zahl zum Teil vollständig gelöster Beispiele gezeigt. Hiedurch hoffe ich, namentlich Autodidakten einen wesentlichen Dienst erwiesen zu haben. Wer sich mit den Potenzen, Wurzeln, Gleichungen des ersten und zweiten Grades vertraut gemacht hat, der wird sich nach dem vorliegenden Werkchen, auch ohne den Unterricht eines Lehrers, gründlich in das Gebiet der Logarithmen und Progressionen einarbeiten können.

Das Studium dieses Buches denke ich mir so: Der Studierende verschafft sich zunächst bei jedem Paragraph über die darin enthaltenen Definitionen, symbolischen Bezeichnungen, Lehrsätze und Beweise volle Klarheit und geht nicht eher weiter, bis er alles wirklich verstanden hat. Sodann liest er einige der nun folgenden Musterauflösungen aufmerksam durch, führt die Lehrsätze und Regeln an, die dabei zur Anwendung kommen und beachtet Gang und Anordnung der Lösung. Hierauf notiert er sich die anderen, mit vollständigen Auflösungen versehenen Aufgaben, versucht dieselben, das Buch bei seite, selbständig zu lösen, vergleicht nun die so erhaltene Auflösung mit der im Buch enthaltenen und untersucht, ob er Fehler gemacht hat und worin sie bestehen. Zur weiteren Übung löst er schließlich auch noch die übrigen, zum größten Teil mit den Resultaten versehenen Aufgaben des Buches.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden Buches habe ich u. a. die mathematischen Werke von Helmes, Spitz, Kleyer und Hofmann zu rate gezogen. Namentlich wurde ein Teil der Aufgaben, die ich mit vollständigen Auflösungen versehen habe, diesen Werken entnommen.

Altdorf, im März 1884.

K. Fuß.

Inhaltsverzeichnis.

Sechster Abschnitt.
Von den Logarithmen.
Erstes Kapitel.
Die Logarithmen überhaupt.

Seite

§. 51. Begriff der Logarithmen und der Logarithmierung 1
§. 52. Die Logarithmensysteme 7

Zweites Kapitel.
Die Briggsschen Logarithmen insbesondere.

§. 53. Die allgemeinen Gesetze der Logarithmen 9
§. 54. Die besonderen Eigenschaften der Briggsschen Logarithmen . 17
§. 55. Einrichtung der Logarithmentafeln 22
§. 56. Gebrauch der Logarithmentafeln 26
§. 57. Berechnung gegebener Zahlenausdrücke mit Hilfe der Logarithmen 40
§. 58. Anwendung der Logarithmen zur Flächen- und Körperberechnung 57
§. 59. Anwendung der Logarithmen zur Auflösung der Exponentialgleichungen 59

Siebenter Abschnitt.
Von den Progressionen.
Erstes Kapitel.
Die Progressionen im allgemeinen.

§. 60. Begriff der Progression 62
§. 61. Die Verschiedenheit der Progressionen 63

Zweites Kapitel.
Die arithmetischen Progressionen.

§. 62. Erklärungen 64
§. 63. Die beiden Fundamentalgleichungen der arithmetischen Reihen 65
§. 64. Die aus den beiden Fundamentalformeln der arithmetischen Reihen hervorgehenden Gleichungen 68
§. 65. Übungsaufgaben 74

Drittes Kapitel.
Die geometrischen Progressionen.

§. 66. Erklärungen 87
§. 67. Die Fundamentalgleichungen der geometrischen Reihen . . 88
§. 68. Die aus den beiden Fundamentalformeln der geometrischen Reihe hervorgehenden Gleichungen 90
§. 69. Übungsaufgaben 97

Anhang.

§. 70. Vermischte Aufgaben über die Logarithmen und Progressionen 105

Sechster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel.

Die Logarithmen überhaupt.

§. 51. Begriff der Logarithmen und der Logarithmierung.

A. Erklärungen.

1) Nach §. 20 ist eine Potenz ein Produkt gleicher Faktoren, z. B. 3^4, 5^3 oder m^n. Bei jeder Potenz kommen drei Größen in betracht: die Basis, der Potenzexponent und der eigentliche Wert der Potenz (die Potenz selbst). So ist in dem Beispiel 3^4 die Zahl 3 die Basis, 4 der Potenzexponent und 81 der Wert der Potenz. Jede dieser drei bei einer Potenz vorkommenden Größen ist durch die beiden übrigen bestimmt, ist eine Funktion derselben. Daher gibt der Begriff der Potenz den Stoff zu drei besonderen Aufgaben oder Operationen. Man kann nämlich, wenn man z. B. von 3^4 ausgeht, folgende Fragen stellen:

a) Welche Zahl x ergibt sich, wenn man die Zahl 3 in die vierte Potenz erhebt? Hier soll also aus der Basis 3 und dem Exponenten 4 der Potenzwert bestimmt werden, eine Aufgabe, welche durch die Potenzgleichung $x = 3^4$ ausgedrückt wird. Mit der Bestimmung der eigentlichen Potenz aus Basis und Exponent beschäftigt sich die Operation des Potenzierens (vergl. den 2. Abschnitt). Beispiele:

$$x = 3^4 = 81; \; x = 10^3 = 1000; \; x = 2^5 = 32.$$

b) Welche Zahl muß man in die vierte Potenz erheben, damit man die Zahl 81 erhält? Hier soll aus dem gegebenen Wert einer Potenz (81) und ihrem Exponenten (4) die Basis (3) bestimmt werden. Diese Aufgabe wird durch die Gleichung $y^4 = 81$ ausgedrückt. Mit der Bestimmung der Basis einer Potenz aus dem gegebenen Wert der Potenz und ihrem Exponenten

beschäftigt sich die Operation der Wurzelausziehung oder der **Radizierung** (man vergl. den 3. Abschnitt). **Beispiele:**

$$y = \sqrt[4]{81} = 3;\; y = \sqrt[3]{1000} = 10;\; y = \sqrt[5]{32} = 2.$$

c) **Mit welcher Zahl z muß die Zahl 3 potenziert werden, damit man die Zahl 81 erhält?** In diesem Fall soll aus dem gegebenen Wert einer Potenz (81) und ihrer Basis (3) der zugehörige Exponent (4) gesucht werden. Diese Frage wird durch die Gleichung $3^z = 81$ ausgedrückt. Die Operation, welche sich mit dem Aufsuchen des Exponenten einer Potenz aus deren Wert und Basis beschäftigt, heißt die **Logarithmierung**.

2) Die **Aufgabe des Logarithmierens** besteht also, dem soeben Gesagten zufolge, **in der Auffindung des Exponenten einer Potenz aus dem Wert und der Basis derselben.** Bei dieser Operation nennt man den zu suchenden Exponenten den **Logarithmus** der gegebenen Potenz und die Potenz selbst **Logarithmand**, **Numerus** (Mehrzahl Numeri) oder schlechthin **Zahl**. In dem obenangeführten Beispiel $3^z = 81$ ist also 3 die Basis, z der Logarithmus und 81 der Logarithmand oder Numerus. Für z aufgelöst, bekommt diese Gleichung folgende Form:

$$z = \overset{3}{\log} 81$$
$$\text{oder } z = {}^{3}\log 81$$
$$\text{oder } z = \log 81 \text{ bas. } 3.$$

Diese Gleichungen werden gelesen: „z ist gleich dem Logarithmus der Zahl 81 zur Basis 3," oder: „z ist der Logarithmus von 81 für die Basis 3." **Beispiele:**

$$4 = \overset{3}{\log} 81;\; 2 = \overset{10}{\log} 100;\; 3 = \overset{2}{\log} 8;\; 5 = \overset{2}{\log} 32.$$

3) Die Logarithmierung hat wieder eine umgekehrte Operation. Dieselbe beschäftigt sich mit dem Aufsuchen der Zahl (Numerus) x aus einer gegebenen Basis (z. B. 3) und einem gegebenen Logarithmus (z. B. 4) und wird das **Antilogarithmieren** genannt. Man bezeichnet diese Operation so:

$$x = \text{num} \overset{3}{\log} 4$$

und liest dies: „x ist gleich dem Numerus des Logarithmus 4 zur Basis 3", oder: „x ist der numerus logarithmi 4 für die Basis 3".

4) Das bisher Gesagte läßt sich übersichtlich in folgender Weise darstellen:

$3^4 = 81$	$3 = \sqrt[4]{81}$	$4 = \overset{3}{\log} 81$	$81 = \text{num} \overset{3}{\log} 4$
Operat. des Potenzierens	Operat. des Radizierens	Operat. des Logarithmierens	Operat. des Antilogarith.
3 heißt: Basis	3 heißt: Wurzel	3 heißt: Basis	3 heißt: Basis
4 „ Potenzexponent	4 „ Wurzelexponent	4 „ Logarithmus	4 „ Logarithmus
81 „ Potenz	81 „ Radikand	81 „ Numerus	81 „ Numerus.

B. Übungsaufgaben.

1) Was versteht man unter dem Logarithmus einer gegebenen Zahl n zu einer gegebenen Basis b?

Antwort. Unter dem Logarithmus einer gegebenen Zahl n zu der gegebenen Basis b versteht man den Exponenten x, mit dem die gegebene Basis b potenziert werden muß, damit man die Zahl n erhält.

2) Welche Gleichung drückt diese Beziehung zwischen den drei genannten Größen b, n und x aus und wie wird dieselbe gelesen?

Antwort. Die angegebene Beziehung zwischen den Größen b, n und x wird durch folgende Gleichung ausgedrückt: $b^x = n$. Für x aufgelöst, wird dieselbe geschrieben:

$$x = \overset{b}{\log} n$$

oder: $x = {}^{b}\log n$

oder: $x = \log n \text{ bas. } b$.

Diese Gleichungen werden gelesen: „x ist der Logarithmus von n zur Basis b" oder kürzer: „x ist der b=Logarithmus von n."

3) Wie wird der Numerus des Logarithmus m zur Basis b dargestellt und wie wird das Dargestellte gelesen?

Antwort. Bezeichnet man den Numerus des Logarithmus m zur Basis b mit y, so wird dieser Numerus ausgedrückt durch

$$y = \text{num} \overset{b}{\log} m.$$

Diese Gleichung wird gelesen: y ist der Numerus des Logarithmus m für die Basis b," oder: „y ist der Numerus des b=Logarithmus m," oder: „y ist der numerus logarithmi m zur Basis b."

4) Welche Beziehung findet zwischen den Gleichungen $b^x = n$

und $x = \overset{b}{\log} n$ einerseits, und den Gleichungen $b^m = y$ und $y = \text{num}\,\overset{b}{\log} m$ andererseits statt?

Antwort. Die beiden ersten Gleichungen für sich und ebenso die beiden letzten drücken ganz dasselbe aus. Die Gleichung $x = \overset{b}{\log} n$ ist also nur eine andere Schreibweise der Gleichung $b^x = n$ und ebenso verhält es sich mit den beiden letzten Gleichungen.

5) Man drücke die folgenden Potenzen in anderen Formen aus: $2^3 = 8$, $6^3 = 216$, $2^6 = 64$, $n^c = ab$, $n^c = a + b$!

Auflösung. Statt $2^3 = 8$ kann man schreiben: $3 = \overset{2}{\log} 8$, oder: $8 = \text{num}\,\overset{2}{\log} 3$. Statt $n^c = ab$ kann man schreiben: $c = \overset{n}{\log}(ab)$, oder: $ab = \text{num}\,\overset{n}{\log} c$ u. s. w.

6) Zu den Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 und 8192 sind die Logarithmen zur Basis 2, oder die Zwei-Logarithmen zu suchen!

Auflösung. $\overset{2}{\log} 2 = 1$; $\overset{2}{\log} 4 = 2$; $\overset{2}{\log} 8 = 3$; $\overset{2}{\log} 16 = 4$; $\overset{2}{\log} 32 = 5$; $\overset{2}{\log} 64 = 6$; $\overset{2}{\log} 128 = 7$ u. s. w.

7) Welches sind die Logarithmen der Zahlen 9, 27, 81, 243, 729, 2187 und 6561 zur Basis 3, oder die Drei-Logarithmen?

Auflösung. $\overset{3}{\log} 9 = 2$; $\overset{3}{\log} 27 = 3$; $\overset{3}{\log} 81 = 4$; $\overset{3}{\log} 243 = 5$; $\overset{3}{\log} 729 = 6$ u. s. w.

8) Wie heißen die Logarithmen der Zahlen 81, 729 und 6561 a) zur Basis 3, b) zur Basis 9 und was geht aus diesen Beispielen hervor?

Auflösung. a) $\overset{3}{\log} 81 = 4$; $\overset{3}{\log} 729 = 6$; $\overset{3}{\log} 6561 = 8$

b) $\overset{9}{\log} 81 = 2$; $\overset{9}{\log} 729 = 3$; $\overset{9}{\log} 6561 = 4$.

Aus diesen Beispielen geht hervor, daß eine und dieselbe Zahl verschiedene Logarithmen haben kann. Soll also der Logarithmus einer Zahl gesucht werden, so muß vor allem die betreffende Basis bestimmt sein.

9) Man berechne: $\overset{10}{\log} 10$, $\overset{10}{\log} 100$, $\overset{10}{\log} 1000$, $\overset{10}{\log} 10000$.

Auflösung. $\overset{10}{\log} 10 = 1$, $\overset{10}{\log} 100 = 2$, $\overset{10}{\log} 1000 = 3$, $\overset{10}{\log} 10000 = 4$.

10) Welches sind die Logarithmen a) von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{16}$ für die Basis 2, b) von $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}$ und $\frac{1}{243}$ für die Basis 3, c) von $\frac{16}{81}$ zur Basis $\frac{2}{3}$, d) von $\frac{9}{25}$ zur Basis $\frac{5}{3}$?

Auflösung. a) $\overset{2}{\log} \frac{1}{2} = -1$, denn $2^{-1} = 1 : 2^1 = \frac{1}{2}$; $\overset{2}{\log} \frac{1}{4} = -2$, denn $2^{-2} = 1 : 2^2 = \frac{1}{4}$; $\overset{2}{\log} \frac{1}{8} = -3$; $\overset{2}{\log} \frac{1}{16} = -4$ (§. 24).

b) $\overset{3}{\log} \frac{1}{81} = -4$, denn $3^{-4} = 1 : 3^4 = \frac{1}{81}$; $\overset{3}{\log} \frac{1}{27} = -3$; $\overset{3}{\log} \frac{1}{243} = -5$

c) $\overset{\frac{2}{3}}{\log} \frac{16}{81} = 4$, denn $(\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$

d) $\overset{\frac{5}{3}}{\log} \frac{9}{25} = -2$, denn $(\frac{5}{3})^{-2} = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$.

11) Zu welcher Potenz muß die Basis m erhoben werden, damit sich 1 ergibt?

Antwort. Zur 0ten Potenz, denn $m^0 = 1$; 0 ist also der Logarithmus von 1.

12) Zu den Zahlen 1, 2, 4, 8, 16 . . . . 1048576 sollen die Logarithmen zur Basis 2 gesucht werden. Die Auflösung stelle man in Form einer Tabelle dar!

Numeri	Logarithmen	Numeri	Logarithmen	Numeri	Logarithmen
1 . . .	. . . 0	128 . . .	. . . 7	16384 . .	. . . 14
2 . . .	. . . 1	256 . . .	. . . 8	32768 . .	. . . 15
4 . . .	. . . 2	512 . . .	. . . 9	65536 . .	. . . 16
8 . . .	. . . 3	1024 . . .	. . . 10	131072 . .	. . . 17
16 . . .	. . . 4	2048 . . .	. . . 11	262144 . .	. . . 18
32 . . .	. . . 5	4096 . . .	. . . 12	524288 . .	. . . 19
64 . . .	. . . 6	8192 . . .	. . . 13	1048576 . .	. . . 20

Anm.: Die sämtlichen Zahlen zu grunde liegende Basis 2 wurde weggelassen.

13) Mit Hilfe vorstehender Tabelle führe man folgende Rechnungen aus: a) $1024 \, . \, 64 = ?$ b) $262144 : 128 = ?$ c) $16^5 = ?$ d) $\sqrt{1048576} = ?$

Auflösung. a) Es ist n. d. Tabelle: $1024 = 2^{10}$

Und: $64 = 2^6$

Beide Gl. mult.: $1024 \, . \, 64 = 2^{10} \, . \, 2^6$ (Gleiches m. Gl. multipl., gibt ꝛc.)

Oder: $1024 \, . \, 64 = 2^{10+6} = 2^{16}$ (vergl. §. 22).

Da nun 2^{16} nach obiger Tabelle 65536 ist, so muß auch $1024 . 64 = 65536$ sein.

b) Es ist n. d. Tabelle: $262144 = 2^{18}$

Und: $128 = 2^7$

Beide Gl. div.: $262144 : 128 = 2^{18} : 2^7$ (Grundsatz)

Oder: $262144 : 128 = 2^{18-7} = 2^{11}$ (§. 23)

2^{11} ist aber nach der Tabelle 2048, folglich muß auch $262144 : 128 = 2048$ sein.

c) Nach der Tabelle ist: $16 = 2^4$

Diese Gl. mit 5 potenziert: $16^5 = (2^4)^5$ (Grundsatz, §. 43, c)

Oder: $16^5 = 2^{20}$ (§. 27)

Da nun 2^{20} nach der Tabelle 1048576 ist, so muß auch $16^5 = 1048576$ sein.

d) Es ist n. d. Tabelle: $1048576 = 2^{20}$

Diese Gl. durch 2 radiziert: $\sqrt{1048576} = \sqrt{2^{20}}$ (Grds. §. 43 c)

Oder: $\sqrt{1048576} = 2^{\frac{20}{2}} = 2^{10}$ (§. 33 d)

2^{10} ist aber nach der Tabelle 1024, folglich ist auch $\sqrt{1048576} = 1024$.

14) Was geht aus den vorstehenden vier Beispielen hervor?

Antwort. Aus denselben geht hervor, daß durch Einführung der Logarithmen die Grundrechnungsoperationen beträchtlich abgekürzt werden; denn daraus ist ersichtlich, daß durch logarithmische Rechnung jede Multiplikation in eine Addition, jede Division in eine Subtraktion, jede Potenzierung in eine Multiplikation und jede Radizierung in eine Division verwandelt wird. Hierin besteht die außerordentliche Wichtigkeit der Logarithmen; mit ihrer Hilfe werden die Ausrechnungen von Zahlenausdrücken ungemein erleichtert. Allerdings ist eine Tabelle, wie die obige, noch nicht aus-

reichend. Soll eine solche ihren Zweck allseitig erfüllen, so muß sie für eine bestimmte Basis die Logarithmen aller aufeinander folgenden Zahlen enthalten.

§. 52. Die Logarithmensysteme.

a) Begriff: Logarithmensystem und Logarithmentafel.

1) Ein Logarithmensystem ist der Inbegriff der Logarithmen aller Zahlen (von 1 an bis zu einer gewissen Grenze) für eine bestimmte Basis.

2) Eine übersichtlich geordnete Zusammenstellung dieser Logarithmen heißt eine Logarithmentafel oder Logarithmentabelle.

b) Wahl der Basis zu einem Logarithmensystem.

Bei Berechnung eines Logarithmensystems handelt es sich vor allem um die Basis, welche demselben zu grunde gelegt werden soll. Da nun ein solches die Logarithmen aller natürlichen Zahlen enthalten muß, so fragt es sich, welche Arten von Zahlen hiezu als Basis brauchbar sind und welche nicht. Untersuchen wir das.

1) Alle Potenzen, denen man die Basis Eins zu grunde legt, sind gleich Eins; denn $1^4 = 1$, $1^8 = 1$, $1^0 = 1$, $1^{-2} = 1 : 1^2 = 1 : 1 = 1$.

2) Die Potenzen von echten Brüchen sind echte Brüche, wenn für die Exponenten positive Zahlen gewählt werden und ganze Zahlen, wenn die Exponenten negativ sind, z. B.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = \frac{2^3}{1^3} = \frac{8}{1} = 8.$$

3) Ist die Basis negativ, so geben die Potenzen teils positive teils negative und teils imaginäre Werte, je nachdem der Exponent eine gerade, ungerade Zahl oder ein Bruch mit einem geraden Nenner ist, z. B. $(-2)^2 = +4$, $(-2)^3 = -8$, $(-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(-2)^3} = \sqrt[2]{-8}$.

4) Aus dem Vorstehenden folgt, daß sich zur Basis eines Logarithmensystems weder die Zahl 1, noch die negativen Zahlen eignen, auch die echten Brüche wählt man nicht hiezu und zwar deshalb nicht, damit man keine negativen Exponenten erhält.

Für die Basis eines Logarithmensystems bleiben somit nur die positiven Zahlen, mit Ausnahme von 1, übrig.

c) Die in der Mathematik gebräuchlichen Logarithmensysteme.

1) Von den unendlich vielen Systemen, welche sich, dem Vorstehenden zufolge, aufstellen lassen, sind in der Mathematik nur zwei in Gebrauch, nämlich das Briggssche Logarithmensystem und das Nepersche Logarithmensystem.

2) Das Briggssche (oder Briggische, oder Briggsche) Logarithmensystem wird nach dem Engländer Briggs *) benannt, der es zuerst berechnete. Diesem System liegt die Grundzahl unseres Zahlensystems, nämlich die Zahl 10 als Basis zu grunde. Seines allgemeinen Gebrauches wegen wird es auch das allgemeine oder gemeine Logarithmensystem genannt. Auch die Bezeichnung künstliches System wird für dasselbe gebraucht. Die Briggsschen Logarithmen werden ohne Angabe der Basis durch log vulg, oder kurz durch log bezeichnet, z. B. log a.

3) Das Npersche (oder Napiersche) Logarithmensystem wird nach seinem Erfinder Napier **) benannt. Diesem System liegt die irrationale Zahl 2, 7182818 . . ., welche gewöhnlich mit e bezeichnet wird, als Basis zu grunde. Wegen der einfachen, natürlichen Weise, in welcher man auf diese Logarithmen geführt wird, werden sie auch die natürlichen Logarithmen genannt, und von der Anwendung, die sie auf die Hyperbel finden, führen sie noch den Namen hyperbolische Logarithmen. Der Logarithmus einer

---

*) Henry Briggs wurde 1556 zu Warley Wood in Yorkshire geboren, war Professor der Mathematik in London, später in Oxford und starb an letzterem Orte 1630. Er veröffentlichte 1624 die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 (an der Berechnung derselben hat er mit 8 Gehilfen über 1 Jahr gearbeitet). Die Lücke von 20000 bis 90000 wurde von dem holländischen Mathematiker Adrian Vlacq ausgefüllt.

**) Lord John Napier (auch Neper und Nepper genannt) wurde 1550 zu Merchiston in Schottland geboren und starb daselbst 1617. Er ist der eigentliche Erfinder der Logarithmen. — Zu erwähnen ist noch, daß die beiden deutschen Mathematiker Justus Byrg und Michael Stiefel zugleich mit oder noch vor Napier, aber unabhängig von demselben, auch die Logarithmen erfanden.

Zahl a dieses Systems wird bezeichnet durch log. nat. a. (logarithmus naturalis a).

4) Die Neperschen oder natürlichen Logarithmen finden nur in der höheren Mathematik Anwendung. In der Elementar-Mathematik und im allgemeinen Gebrauch werden fast ausschließlich die Briggsschen oder gemeinen Logarithmen angewandt. Daher werden wir im folgenden nur die letzteren betrachten.

Zweites Kapitel.

Die Briggsschen Logarithmen insbesondere.

§. 53. Die allgemeinen Gesetze der Logarithmen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Vorbemerkung.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß alle vorkommenden Logarithmen sich auf dieselbe Basis, nämlich auf 10, beziehen. Daher wird die Bezeichnung „bei einerlei Basis" und die Bezeichnung der Basis selbst weggelassen.

b) Gebrauch der Klammern.

Inbezug auf den Gebrauch von Klammern bei Logarithmen hat man sich des Satzes zu erinnern, daß die höheren Operationen den niederen stets vorangehen; daher muß der Logarithmus einer Summe, einer Differenz u. s. w. jedesmal in eine Klammer gesetzt werden.

c) Beziehung zwischen den Sätzen über Potenzen und Logarithmen.

Da die Logarithmen nichts anderes als Potenzexponenten sind, so müssen für sie alle Sätze, welche von den Exponenten der Potenzen mit gleicher Basis gelten, volle Gültigkeit haben, namentlich die folgenden vier:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (§. 22). 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (§. 27)

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ (§. 23). 4) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (§. 33, d).

Diese vier Sätze werden wir künftig in der folgenden neuen Gestalt anwenden.

d) Logarithmierung eines Produkts.

Man findet den Logarithmus eines Produkts, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.

Behauptung. $\log (m \cdot n) = \log m + \log n$.

Beweis. Angenommen, man habe die Logarithmen der Zahlen m und n in den Tafeln, welche für die Basis 10 berechnet sind, aufgeschlagen und gefunden:

$$1)\ \log m = x$$

$$2)\ \log n = y.$$

Bringt man diese beiden Gleichungen in die Potenzform, so erhält man für die Basis 10 (§. 51, B, 4):

$$3)\ 10^x = m$$

$$4)\ 10^y = n$$

Gleichung 3) und 4) mit einander multipliciert, erhält man:

$$5)\ 10^{x+y} = m \cdot n\ (\text{§. } 22)$$

Schreibt man die Gleichung 5) wieder in logarithmischer Form (§. 51, B, 4 und 5), so kommt:

$$6)\ \log (m \cdot n) = x + y\ (\text{für die Basis } 10)$$

Die Gleichung 1) und 2) addiert, ergibt sich:

$$7)\ \log m + \log n = x + y$$

Substituiert man nun in Gl. 6) für $x + y$ den Wert hiefür aus Gl. 7), so ist:

$$8)\ \log (m \cdot n) = \log m + \log n,$$ w. z. b. w.

Beispiele: 1) $\log(abc) = \log a + \log b + \log c$

2) $\log(10 \cdot 100) = \log 10 + \log 100 = 1 + 2 = 3$

3) $\log a + \log b + \log c = \log (abc)$ (Umkehrg. des Lehrs. d)

4) $\log a \cdot \log b = \log a \cdot \log b$ (Man verwechsle diesen Ausdruck nicht mit $\log (ab)$. Der letztere ist der Logarithmus eines Produkts, der Ausdruck $\log a \cdot \log b$ dagegen stellt ein Produkt von Logarithmen dar).

5) Ist: $\log 2 = 0{,}3010300$

Und: $\log 3 = 0{,}4771213$

So ist: $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3010300 + 0{,}4771213 = 0{,}7781513$

Oder: $\log 6 = 0{,}7781513$.

e) Logarithmierung eines Quotienten.

Man findet den Logarithmus eines Quotienten, indem man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendus subtrahiert.

Behauptung. $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist dem des vorigen ganz analog, nämlich: Es sei aus einer Logarithmentafel gefunden:

1) $\log m = x$

2) $\log n = y$

Mithin: 3) $10^x = m$

Und: 4) $10^y = n$

Gl. 3 durch 4 div.: 5) $\frac{10^x}{10^y} = \frac{m}{n}$

Oder: $10^{x-y} = \frac{m}{n}$

Oder: 6) $\log \frac{m}{n} = x - y$

Gl. 2) von 1) sub.: 7) $\log m - \log n = x - y$

Folglich: 8) $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$, w. z. b. w.

Beispiele: 1) $\log \frac{ab}{c} = \log (ab) - \log c = \log a + \log b - \log c$

2) $\log \frac{ab}{cd} = \log (ab) - \log (cd) = \log a + \log b - (\log c + \log d) = \log a + \log b - \log c - \log d$

3) $\log p - \log q = \log \frac{p}{q}$ (Umkehrung des Lehrs. e)

4) $\frac{\log (mn)}{\log (pq)} = \frac{\log m + \log n}{\log p + \log p}$

Dieser Ausdruck ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner je aus dem Logarithmus eines Produkts besteht, und nicht der Logarithmus eines Bruchs.

5) Ist $\log 15 = 1{,}1760913$

Und $\log 3 = 0{,}4771213$

So ist $\log 5 = \log \frac{15}{3} = \log 15 - \log 3 = 1{,}1760913 - 0{,}4771213 = 0{,}69897$

Oder $\log 5 = 0{,}69897$.

f) Logarithmierung einer Potenz.

Man findet den Logarithmus einer Potenz, indem man den Exponenten der Potenz mit dem Logarithmus des Dignanden multipliciert.

Behauptung. $\log m^n = n \log m$.

Beweis. Angenommen, es sei aus einer Logarithmentafel gefunden:

	1) $\log m = x$
In Potenzf. geschrieben:	2) $10^x = m$
Gl. 2) mit n potenz.:	3) $(10^x)^n = m^n$
Oder:	4) $10^{nx} = m^n$
Gl. 4) logarith. geschr.:	5) $\log m^n = nx$
In Gl. 5) für x f. W. aus 1) gef.:	6) $\log m^n = n \log m$, w. z. b. w.

Beispiele: 1) $\log (ab)^m = m \log (ab) = m (\log a + \log b)$

2) $\log \frac{a^m}{c^n} = \log a^m - \log c^n = m \log a - n \log c$

3) $\log \frac{a^m b}{c^n} = \log (a^m b) - \log c^n = m \log a + \log b - n \log c$

4) $\log \left(\frac{m}{n}\right)^x = x \log \frac{m}{n} = x(\log m - \log n)$

5) Ist $\log 2 = 0{,}30103$

so ist $\log 8 = \log (2^3) = 3 \log 2 = 3 \,.\, 0{,}30103 = 0{,}90309$.

g) Logarithmierung einer Wurzel.

Man findet den Logarithmus einer Wurzel, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

Behauptung. $\log \sqrt[n]{m} = \frac{\log m}{n}$

Beweis. Angenommen, es sei:

	1) $\log m = x$
Also:	2) $10^x = m$

Zieht man aus Gleichung 2) die nte Wurzel, so ist:

	3) $\sqrt[n]{10^x} = \sqrt[n]{m}$
Oder:	4) $10^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{m}$

Logarithm. geschr.: 5) $\log \sqrt[n]{m} = \frac{x}{n}$

Substituiert man in Gl. 5) den Wert für x aus Gl. 1), so kommt:

$$6) \log \sqrt[n]{m} = \frac{\log m}{n}, \text{ w. z. b. w.}$$

Beispiele: 1) $\log \sqrt[n]{ab} = \frac{\log (ab)}{n} = \frac{\log a + \log b}{n}$

2) $\log \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{n} = \frac{\log a - \log b}{n}$

3) $\log \sqrt[m]{a^c} = \frac{\log a^c}{m} = \frac{c \log a}{m}$

4) $\log \sqrt[3]{\frac{a^2b}{d}} = \frac{1}{3}[\log(a^2b) - \log d] = \frac{1}{3}[2 \log a + \log b - \log d]$

5) $\log \frac{b^m}{\sqrt[7]{a + b}} = \log b^m - \log \sqrt[7]{a + b} = m \log b - \frac{1}{7} \log (a + b)$.

6) $\frac{1}{m} \cdot \log (a + b) = \log \sqrt[m]{a + b}$ (Umkehrung des Lehrs. g).

7) $\frac{1}{m} \log a - \frac{1}{n}(\log a + \log b) = \log \sqrt[m]{a} - \log \sqrt[n]{ab} = \log (\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{ab})$.

B. Übungsaufgaben.

Vorbemerkung. Sollen Zahlenausdrücke logarithmisch berechnet werden, so muß man dieselben vorerst in die Logarithmen ihrer Bestandteile zerlegen. Dies geschieht durch wiederholte Anwendung der unter d bis g aufgestellten und bewiesenen Lehrsätze Zur Erlangung der hiezu nötigen Fertigkeit wollen wir zunächst eine größere Anzahl allgemeiner Ausdrücke logarithmieren, d. h. in die Logarithmen ihrer Bestandteile zerlegen.

1) $\log(abc) = ?$ 2) $\log [(a + b)(c + d)] = ?$ 3) $\log(m^2 - n^2) = ?$

4) $\log \frac{abc}{fgh}$ Auflösung:

$$= \log(abc) - \log(fgh)$$
$$= \log a + \log b + \log c - (\log f + \log g + \log h)$$
$$= \log a + \log b + \log c - \log f - \log g - \log h.$$

Erläuterung. Vorstehende Auflösung zu Aufgabe 4) wurde zuerst nach Lehrsatz e) und dann nach Lehrsatz d) ausgeführt.

5) $\log \frac{1}{m} = ?$ 6) $\log \frac{5mn}{8rs} = ?$ 7) $\log \frac{abc}{m(p+q)} = ?$

8) $\log(ab)^m = ?$ 9) $\log(a^3b^4c^5) = ?$ 10) $\log(ab^m)^n = ?$

11) $\log [(a^rb)^tc^xd]^m$ Auflösung:

$= m . \log[(a^rb)^tc^xd]$ . . vergl. Lehrs. f).
$= m . [\log(a^rb)^t + \log c^x + \log d]$ „ „ d).
$= m . (t . \log(a^rb) + x \log c + \log d)$ „ „ f).
$= m . [t . (\log a^r + \log b) + x \log c + \log d]$ „ „ d)
$= m[t(r \log a + \log b) + x \log c + \log d]$ „ „ f)

12) $\log \frac{(ab^m)^t}{c^ud} = ?$ 13) $\log \frac{m}{a^c . b^d} = ?$ 14) $\log \frac{a^rx^n}{b^mc^r} = ?$

15) $\log \sqrt[m]{ab} = ?$ 16) $\log b \sqrt[m]{a^n} = ?$ 17) $\log (m+n) \sqrt[r]{p-q} = ?$

18) $\log m \sqrt[n]{\frac{b}{c}} = ?$ 19) $\log \sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^2}} = ?$

20) $\log (a^n + c) \sqrt{\frac{b^r}{m}} = ?$ 20a) $\log \frac{a^n}{b^m} . \sqrt{\frac{fg}{h}} = ?$

21) $\log \frac{mp^2}{a\sqrt{b^7}}$ Auflösung:

$= \log (mp^2) - \log (a\sqrt{b^7})$ . . . . vergl. Lehrs. e)
$= \log m + \log p^2 - [\log a + \log \sqrt{b^7}]$ . . . „ „ d)
$= \log m + 2 \log p - [\log a + \frac{1}{2} . \log b^7]$ . . . „ „ f) u. g)
$= \log m + 2 \log p - \log a - \frac{7}{2} \log b$ . . . „ „ f).

22) $\log \frac{p_t}{\sqrt[m]{\left(\frac{b}{a}\right)^n}} = ?$ 23) $\log \frac{p_t}{\sqrt[m]{b\sqrt[n]{cd}}} = ?$

24) $\log \frac{1}{a\sqrt[4]{a^3b}} = ?$ 24a) $\log \frac{1}{(m+n)^2\sqrt[3]{p-r}} = ?$

25) $\log \frac{m\sqrt[7]{a^5}}{n\sqrt{b}}$ Auflösung:

$= \log[m\sqrt[7]{a^5}] - \log[n\sqrt{b}]$ . . . . . nach Lehrs. e)

$= \log m + \log\sqrt[7]{a^5} - [\log n + \log\sqrt{b}]$. " " d)

$= \log m + \frac{1}{7}\log a^5 - [\log n + \frac{1}{2}\log b]$ . . . " " g)

$= \log m + \frac{5}{7}\log a - \log n - \frac{1}{2}\log b$ . . . " " f).

26) $\log \frac{a^2\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{c^2m}} = ?$ 27) $\log \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[5]{a+b}} = ?$

28) $\log \frac{(a+b)^m\sqrt[3]{c^2}}{(h+k)^t\sqrt{p}} = ?$ 28a) $\log \frac{3(m-n)}{\sqrt{m^2-n^2}} = ?$

29) $\log a^5\sqrt[7]{b^4\sqrt[5]{c^4\sqrt[3]{d^2}}}$ Auflösung:

$= \log a^5 + \log\sqrt[7]{b^4\sqrt[5]{c^4\sqrt[3]{d^2}}}$ . . . . nach Lehrs. d)

$= 5\log a + \frac{1}{7}\log\left[b^4\sqrt[5]{c^4\sqrt[3]{d^2}}\right]$ . . nach Lehrs. f) u. g)

$= 5\log a + \frac{1}{7}\left[\log b^4 + \log\sqrt[5]{c^4\sqrt[3]{d^2}}\right]$. u. Lehrs. d)

$= 5\log a + \frac{1}{7}[4\log b + \frac{1}{5}\log(c^4\sqrt[3]{d^2})]$. n. Lehrs. f) u. g)

$= 5\log a + \frac{1}{7}[4\log b + \frac{1}{5}(\log c^4 + \log\sqrt[3]{d^2}]$. n. Lehrs. d)

$= 5\log a + \frac{1}{7}[4\log b + \frac{1}{5}(4\log c + \frac{2}{3}\log d)]$ n. Lehrs. f) u. g).

30) $\log m^7\sqrt[9]{\frac{n^8\sqrt[7]{p^2:q^3}}{r^7\sqrt[5]{(s-t)^2}}}$ Auflösung:

$$= \log m^7 + \log \sqrt[9]{\frac{n^8 \sqrt[7]{p^2 : q^3}}{r^7 \sqrt[5]{(s-t)^2}}} \quad \ldots \text{nach Lehrs. d)}$$

$$= 7 \log m + \tfrac{1}{9} \log \frac{n^8 \sqrt[7]{p^2 : q^3}}{r^7 \sqrt[5]{(s-t)^2}} \quad \ldots \text{n. Lehrs. f) u. g)}$$

$$= 7 \log m + \tfrac{1}{9} [\log n^8 \sqrt[7]{p^2 : q^3} - \log r^7 \sqrt[5]{(s-t)^2}] \quad . \text{ Lehrs. e)}$$

$$= 7 \log m + \tfrac{1}{9} [\log n^8 + \log \sqrt[7]{p^2 : q^3} - (\log r^7 + \sqrt[5]{(s-t)^2}] \quad . \text{ „ d)}$$

$$= 7 \log m + \tfrac{1}{9} [8 \log n + \tfrac{1}{7} \log (p^2 : q^3) - (7 \log r + \tfrac{1}{5} \log (s-t)^2)] \text{ „ f) u. g)}$$

$$= 7 \log m + \tfrac{1}{9} [8 \log n + \frac{2 \log p - 3 \log q}{7} - (7 \log r + \tfrac{2}{5} \log (s-t))].$$

Resultate und Andeutungen.

1) $\log a + \log b + \log c$; nach Lehrs. d. 2) $\log (a+b) + \log (c + d)$. Die Logarithmen der Summen und Differenzen sind an dieser Stelle keiner Umformung fähig. Man hüte sich $\log (a + b) = \log a + \log b$ und $\log (a - b) = \log a - \log b$ zu setzen; denn $\log a + \log b$ ist ja nach Lehrs. d der Logarithmus von dem Produkt ab und $\log a - \log b$ nach Lehrsatz e) der Logarithmus von dem Quotienten $a : b$. Man vergl. auch §. 34, 3 und 7. 3) Nach dem soeben Gesagten kann die angedeutete Logarithmierung an $m^2 - n^2$ nicht ausgeführt werden. Setzt man aber $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$, so erhält man $\log (m + n) + \log (m - n)$. 5) $- \log m$; denn $\log (1 : m) = \log 1 - \log m = 0 - \log m = - \log m$. Der Logarithmus von 1 ist gleich Null; denn $10^0 = 1$ (§. 24, 3) 6) $\log 5 + \log m + \log n - \log 8 - \log r - \log s$. 7) $\log a + \log b + \log c - [\log m + \log (p + q)]$ 8) $m (\log a + \log b)$; zuerst nach Lehrsatz f), dann nach Lehrs. d) 9) $3 \log a + 4 \log b + 5 \log c$ 10) $n[\log a + m \log b]$ 12) $t(\log a + m \log b) - u \log c - \log d$ 13) $\log m - c \log a - d \log b$ 14) $r \log a + n \log x - m \log b - r \log c$ 15) $\frac{1}{m} (\log a + \log b)$ 16) $\log b + \frac{n \log a}{m}$; nach Lehrs. d und g) 17) $\log (m + n) +$

$\frac{\log(p - q)}{r}$ 18) $\log m + \frac{\log b - \log c}{n}$

19) $\frac{2\log a + \log b - 2\log c}{3}$ 20) $\log(a^n + c) + \frac{r\log b - \log m}{2}$

22) $t \log p - \frac{n(\log b - \log a)}{m}$ 23) $t \log p - [\log b$
$+ \frac{1}{n}(\log c + \log d)] : m.$ 24) $- \frac{7}{4} \log a - \frac{1}{4} \log b$. Man beachte die Bemerkung zu Aufgabe 5.
26) $2 \log a + \frac{3}{7} \log b - \frac{2}{3} \log c - \frac{1}{3} \log m$ 27) $\frac{1}{3} \log m - \frac{1}{5} \log(a + b)$ 28) $m \log(a + b) + \frac{2}{3} \log c - t \log(h + k) - \frac{1}{2} \log p$.

§. 54. Die besonderen Eigenschaften der Briggsschen Logarithmen.

a) Rationale und irrationale Logarithmen.

1) Im Briggsschen Logarithmensystem sind die Logarithmen aller derjenigen Zahlen, welche Potenzen von 10 sind, rationale und zwar ganze Zahlen; die Logarithmen aller anderen Zahlen dagegen sind irrationale Zahlen (sind also nur annäherungsweise angebbar, §. 30, b). So ist:

1	der Logarithmus von	10,	denn $10^1 =$	10
2	„ „ „	100,	„ $10^2 =$	100
3	„ „ „	1000,	„ $10^3 =$	1000
4	„ „ „	10000,	„ $10^4 =$	10000
5	„ „ „	100000,	„ $10^5 =$	100000 u. s. w.

Da der Logarithmus von 1 gleich Null (denn $10^0 = 1$) und von 10 gleich 1 ist, so muß der Logarithmus der zwischen 1 und 10 liegenden Zahlen größer als 0 und kleiner als 1, der zwischen 10 und 100 liegenden größer als 1 und kleiner als 2 sein u. s. w. Die Logarithmen der weitaus meisten Zahlen sind also irrational, mithin nur annäherungsweise angebbar. Doch läßt sich ein jeder dieser Logarithmen so genau angeben als man will. Ihre annähernden Werte drückt man in der Form von Dezimalbrüchen aus.

2) Die Briggischen Logarithmen bestehen somit aus zwei Teilen, aus Ganzen und einem Dezimalbruch. Man nennt die in einem Logarithmus enthaltenen Ganzen die Charakteristik oder

Kennziffer und den angehängten Dezimalbruch die Mantisse (lat. mantissa, Zugabe) desselben. So ist z. B. in log 362 = 2,5587086 die vor dem Dezimalkomma stehende Zahl 2 die Kennziffer und die dem Komma folgenden Dezimalstellen 5587086 die Mantisse. Bei den Logarithmen von 10, 100, 1000 u. s. w. ist die Mantisse gleich Null.

b) Berechnung der Briggsschen Logarithmen.

1) Die mühevolle Arbeit der Berechnung der Logarithmen ist beendet. Eine große Zahl von Logarithmentafeln wurde seit der Erfindung der Logarithmen aufgestellt, in denen man die Briggsschen Logarithmen der auf einander folgenden Zahlen von 1 an bis zu einer gewissen Grenze auffinden kann. Aus diesem Grunde braucht man die Art und Weise ihrer Berechnung nicht zu kennen. Auch zum Verständnis ihres Gebrauches ist diese Kenntnis nicht nötig. Man kann die Logarithmentafeln mit vollem Verständnis zur Lösung praktischer Aufgaben benützen, ohne zu wissen, auf welche Weise die Logarithmen, die sie enthalten, gefunden wurden. Gleichwohl ist es von Interesse, zu erfahren, auf welche Weise die Briggsschen Logarithmen berechnet werden können. Suchen wir uns daher hievon eine Vorstellung zu verschaffen. Es gibt viele Methoden, nach welchen man die Logarithmen gegebener Zahlen berechnen kann. Die höhere Mathematik lehrt die einfachsten und bequemsten. Diejenigen Verfahrungsarten, welche die Elementar-Mathematik bietet, sind äußerst umständlich und mühevoll. Unter diesen wollen wir diejenige besprechen, nach welcher Briggs die Logarithmen berechnet haben soll.

2) Angenommen, es sei der Briggssche Logarithmus x der Zahl 5 zu berechnen, d. h. diejenige Zahl, mit welcher 10 zu potenzieren ist, um 5 zu erhalten, also $10^x = 5$. Da $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$, mithin $10^0 < 5$ und $10^1 > 5$ ist, so muß der gesuchte Logarithmus x zwischen 0 und 1 liegen. Nun untersucht man, ob vielleicht 10 auf die $(0 + 1) : 2 = \frac{1}{2}$te Potenz erhoben, die Zahl 5 gibt (macht also das arithmetische Mittel zwischen den Exponenten 0 und 1 zum Exponenten von 10). Da $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}1622776601 \ldots$ ist, so ist $10^{\frac{1}{2}} < 5$. Daraus folgt, daß der gesuchte Logarithmus x zwischen den schon engeren Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen muß, denn $10^{\frac{1}{2}} < 5$ und $10^1 > 5$. Nun nimmt

man wieder das arithmetische Mittel zwischen den Grenzwerten $\frac{1}{2}$ und 1, nämlich $(\frac{1}{2} + 1) : 2 = \frac{3}{4}$ und untersucht, ob vielleicht 10 auf die Potenz $\frac{3}{4}$ erhoben, die Zahl 5 gibt. Erhebt man 10 auf die $\frac{3}{4}$ Potenz, so erhält man:

$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{10^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{10^1 \,.\, 10^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{10 \,.\, \sqrt{10}} = \sqrt{10 \,.\, 3{,}1622776601}$ $= 5{,}6234132 \ldots$ Daraus geht hervor, daß der gesuchte Logarithmus x der Zahl 5 zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ liegen muß, denn $10^{\frac{1}{2}} < 5$ und $10^{\frac{3}{4}} > 5$. Setzt man dieses Verfahren fort, so wird man finden, daß, nachdem man es etwa 22mal wiederholt hat, $10^{\frac{2931693}{4194304}}$ $= 5{,}00000086 \ldots$ ist, woraus folgt, daß man, ohne einen großen Fehler zu machen, als Wert dieser letzteren Potenz 5 setzen kann. Verwandelt man noch den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch, so ist annähernd $10^{0{,}6989700} = 5$, mithin $\log 5 = 0{,}6989700$.

c) Beziehung zwischen den Logarithmen und den dazu gehörigen Zahlen.

1) Die Kennziffer des Logarithmus irgend einer ganzen Zahl ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern dieser Zahl.

Erläuterung. Da $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10000 = 4$ u. s. w. ist, so folgt daraus, daß die Logarithmen aller einstelligen Zahlen zwischen 0 und 1 liegen, also zur Kennziffer 0 haben, ferner die Logarithmen aller zweistelligen Zahlen (z. B. 24, 56, 89) zwischen 1 und 2 liegen, mithin zur Charakteristik 1 haben, sodann die Logarithmen aller dreistelligen Zahlen (z. B. 349, 857) zwischen 2 und 3 liegen, folglich zur Kennziffer 2 haben u. s. w. Also haben die Logarithmen

aller	1 stelligen	Zahlen	als	Kennziffer	0
„	2	„	„	„	1
„	3	„	„	„	2
„	4	„	„	„	3
„	5	„	„	„	4
„	n	„	„	„	(n—1).

So ist z. B. $\log 5 = 0{,}6989700$, $\log 17 = 1{,}2304489$, $\log 264 = 2{,}4216039$, $\log 4571 = 3{,}6600112$ u. s. w. — Aus Satz 1) ergibt sich noch folgendes:

α) Man findet die Charakteristik des Logarithmus einer Zahl, indem man die Anzahl der Stellen dieser Zahl um 1 vermindert, z. B. log6 = 0 . . .; log14 = 1 . . .; log340 = 2, . . .; log4573 = 3, . . . ; log63735 = 4, . . . u. s. w.

β) Die Anzahl der Stellen der zu einem gegebenen Logarithmus gehörenden Zahl (Numerus) beträgt um eine mehr, als die Charakteristik des Logarithmus Einheiten enthält, also ist num log0, . . . eine 1stellige, num log1, . . . eine 2stellige, num log2, . . . eine 3stellige, num log 3, . . . eine 4stellige Zahl u. s. w.

γ) Aus Satz β) ergibt sich, aus welchem Grund man die Ganzen eines Logarithmus die Kennziffer oder die Charakteristik desselben nennt.

δ) In den Tafeln für die Briggsschen Logarithmen ist nur die Mantisse angegeben, nicht aber die Charakteristik, da sich nach Satz α) dieselbe aus der Zifferzahl des vorgelegten Numerus sofort ergibt.

2) Der Logarithmus eines Dezimalbruches, dem Ganze vorangehen, wird erhalten, indem man die Kennziffer der Ganzen nach Satz 1) bestimmt und daran die Mantisse hängt, welche zu den Ganzen und den Dezimalstellen, als eine ganze Zahl betrachtet, gehört.

Erläuterung. 1) log 43,25 = 1, 6359861; denn:

log 43,25 = log(4325 : 100)
= log 4325 — log 100 (Lehrs. e, §. 53).
= 3,6359861 — 2
= 1, 6359861.

2) log 4,571 = 0, 6600112, denn:

log 4,571 = log (4571 : 1000)
= log 4571 — log 1000 (Lehrs. e, §. 53)
= 3,6600112 — 3
= 0,6600112. — Aus Satz 2) ergibt sich noch folgendes:

α) Der Logarithmus eines reinen Dezimalbruches hat eine negative Charakteristik und diese negative Charakteristik hat so viele Einheiten, als direkt vor und hinter dem Komma des Dezimalbruches Nullen stehen.

Nachweis: 1) log 0,573 = 0,7581546 — 1; denn:

$$\log 0{,}573 = \log (573 : 1000)$$
$$= \log 573 - \log 1000 \text{ (Lehrs. e, §. 53)}$$
$$= 2{,}7581546 - 3$$
$$= 0{,}7581546 - 1.$$

In der Differenz 2,7581546 — 3 ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Würde man diese Subtraktion wirklich ausführen, so erhielte man einen negativen Logarithmus. Um solche zu vermeiden, führt man diese Subtraktion, wie oben, nur teilweise aus, läßt dieselben also in zweiteiliger Form stehen.

2) log 0,0573 = 0,7581546 — 2, denn:

$$\log 0{,}0573 = \log (573 : 10000)$$
$$= \log 573 - \log 10000$$
$$= 2{,}7581546 - 4$$
$$= 0{,}7581546 - 2.$$

β) Der Logarithmus eines reinen Dezimalbruches wird erhalten, wenn man zu demselben, als ganze Zahl betrachtet, die Mantisse sucht, ihr als Kennziffer 0 Ganze vorsetzt und als negative Kennziffer eine Zahl anhängt, die so viele Einheiten hat, als der ersten werthabenden Dezimalstelle Nullen (mit Einschluß der 0 Ganzen) vorangehen.

Beispiele: 1) log 0,00573 = 0,7581546 — 3

2) log 0,000573 = 0,7581546 — 4.

γ) Ist die Kennziffer eines Logarithmus positiv, so sind in dem zu diesem Logarithmus gehörigen Numerus Ganze vorhanden und zwar beträgt die Anzahl der Stellen dieser Ganzen 1 mehr als die Kennziffer Einheiten enthält (Umkehrung von Satz 2).

Beispiele. 1) num log 1,0791812 = 12

2) num log 0, 660112 = 4,571.

δ) Ist die Kennziffer eines Logarithmus negativ (die Mantisse aber positiv), so ist der diesem Logarithmus entsprechende Numerus ein reiner Dezimalbruch, bei welchem der ersten Dezimalstelle von Wert so viele Nullen (mit Einschluß der 0 Ganzen) vorangehen, als die negative Kennziffer Einheiten hat (Umkehrung von Satz α).

Beispiele. 1) num log 0,5670617 — 4 = 0,00036903
2) num log 0,0362295 — 1 = 0,1087.

ε) Die Logarithmen aller Zahlen, welche mit denselben Ziffern in derselben Ordnung geschrieben sind, und sich nur durch angehängte Nullen oder durch die Stellung des Dezimalkommas unterscheiden, haben dieselbe Mantisse, nur verschiedene Kennziffern.

Beispiele. log 342 = 2,5340261
log 3420 = 3,5340261
34,2 = 1,5340261
3,42 = 0,5340261
0,342 = 0,5340261 — 1
0,0342 = 0,5340261 — 2

§. 55. Einrichtung der Logarithmentafeln.

a) Allgemeines über die Logarithmentafeln.

1) Es ist schon an verschiedenen Stellen bemerkt worden, daß man die Briggischen Logarithmen der auf einander folgenden Zahlen von 1 an bis zu einer gewissen Grenze berechnet und in Tafeln, die man Logarithmentafeln oder Logarithmentabellen nennt, übersichtlich geordnet zusammengestellt hat.

2) Die Logarithmen aller Zahlen, mit Ausnahme der wenigen, welche Potenzen von 10 sind, wie z. B. 10, 100, 1000 u. s. w., sind irrationale Zahlen; folglich kann der wahre Wert derselben nicht angegeben werden. Die Logarithmentafeln können also nur Näherungswerte derselben enthalten; wie wir bereits wissen sind dieselben in der Form von Dezimalbrüchen ausgedrückt. Diese Näherungswerte sind aber in beliebiger Stellenzahl darstellbar. Es gibt daher Tafeln, welche die Logarithmen einer gewissen Reihe von Zahlen auf 4, 5, 6, 7 bis 14 Dezimalstellen angeben. Je nach dem bei numerischen Berechnungen erforderlichen Grad der Genauigkeit bedient man sich der einen oder der andern Tafel.

3) Sehr weit verbreitet sind die 7stelligen Logarithmentafeln von Vega (Georg Freiherr von Vega, logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, bearbeitet von Bremiker). Diese Tafeln wurden auch in vorliegendem Werkchen benützt. Für den Schulgebrauch genügen kleinere Tafeln, z. B. die fünfstelligen Tafeln von Schlömilch und die vierstelligen von Müller.

b) Die Einrichtung der Logarithmentafeln.

1) Die Logarithmentafeln von Vega enthalten die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 99 999. Da die Kennziffer eines Logarithmus aus der zugehörigen Zahl leicht bestimmt werden kann, so enthalten die Logarithmentafeln diese Kennziffer nicht, sondern nur die Mantissen. Die Richtigkeit der letzten Ziffer der in den Tafeln stehenden Mantisse kann nicht verbürgt werden, da dieselbe um 1 vergrößert wurde, wenn die bei der Berechnung der Logarithmen sich ergebende nächstfolgende achte Ziffer, welche aber die Tafeln nicht mehr enthalten, 5 oder über 5 war.

2) Die sämtlichen Seiten der Logarithmentafeln sind durch Linien in mehrere Vertikalreihen eingeteilt. Dieselben tragen auf den Seiten 2 bis 5 als Über- und Unterschriften abwechselnd die Bezeichnung: N. (Numerus, Zahl) und Log. (Logarithmus). In den mit N überschriebenen Rubriken stehen auf den Seiten 2 bis 5 die ein-, zwei- und dreizifferigen Zahlen, also die Zahlen von 1 bis 999 und in den danebenstehenden Reihen die Mantissen der zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen. Der Anfang sieht so aus:

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	—	50	698 9700	100	000 0000	150	176 0913	200	301 0300
1	000 0000	51	707 5702	101	004 3214	151	178 7969	201	303 1961
2	301 0300	52	716 0033	102	008 6002	152	181 8436	202	305 3514
3	477 1213	53	724 2759	103	012 8372	153	184 6914	203	307 4960
4	602 0600	54	732 3938	104	017 0333	154	187 5207	204	309 6302
5	698 9700	55	740 3627	105	021 1893	155	190 3317	205	311 7539
6	778 1513	56	748 1880	106	025 3059	156	193 1246	206	313 8672
7	845 0980	57	755 8749	107	029 3838	157	195 8997	207	315 9703
.	. . .	.	. . .	.	. . .	.	. . .	.	. . .
.	. . .	.	. . .	.	. . .	.	. . .	.	. . .

3) Die weiteren Seiten 6 bis 185 der Logarithmentafeln sind ebenfalls in Vertikalkolumnen eingeteilt. Von diesen sind aber nur die ersteren mit N (Numerus), die andern dagegen der Reihe nach mit den Ziffern 0, 1, 2 . . . 9 überschrieben. In den mit N überschriebenen Rubriken stehen alle vierzifferigen Zahlen. Werden den in dieser Spalte stehenden vierzifferigen Zahlen der Reihe nach die Ziffern 0, 1, 2 . . . 9, welche in den übrigen Vertikalko-

lumnen stehen, als weitere Ziffer angehängt, so erhält man dadurch alle fünfzifferigen Zahlen (die in der ersten Vertikalspalte stehenden vierzifferigen Zahlen sind also zugleich die Zehner der fünfzifferigen Zahlen). Der Anfang dieser Tabelle sieht so aus:

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	
1000	000 0000	0434	0869	1303	1737	2171	2605	3039	3473	3907		
01	4341	4775	5208	5642	6076	6510	6943	7377	7810	8244		435
02	8677	9111	9544	9977	$\bar{0}411$	$\bar{0}844$	$\bar{1}277$	$\bar{1}710$	$\bar{2}143$	$\bar{2}576$	1	43,5
03	001 3009	3442	3875	4308	4741	5174	5607	6039	6472	6905	2	87,0
04	7337	7770	8202	8635	9067	9499	9932	$\bar{0}364$	$\bar{0}796$	$\bar{1}228$	3	130,5
05	002 1661	2093	2525	2957	3389	3821	4253	4685	5116	5548	4	174,0
06	5980	6411	6843	7275	7706	8138	8569	9001	9432	9863	5	217,5
07	003 0295	0726	1157	1588	2019	2451	2882	3313	3744	4174	6	261,0
08	4605	5036	5467	5898	6328	6759	7190	7620	8051	8481	7	304,5
09	8912	9342	9772	$\bar{0}203$	$\bar{0}633$	$\bar{1}063$	$\bar{1}493$	$\bar{1}924$	$\bar{2}354$	$\bar{2}784$	8	348,0
											9	391,5
1010	004 3214	3644	4074	4504	4933	5363	5793	6223	6652	7082		
11	7512	7941	8371	8800	9229	9659	$\bar{0}088$	$\bar{0}517$	$\bar{0}947$	$\bar{1}376$		
12	005 1805	2234	2663	3092	3521	3950	4379	4808	5237	5666		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	

4) In der mit 0 überschriebenen Spalte stehen die Logarithmenmantissen derjenigen Zahlen, welche in der mit N bezeichneten Rubrik enthalten sind, sowie derjenigen Zahlen, welche man erhält, wenn man jenen vierzifferigen Zahlen als weitere Ziffer eine Null anhängt (vergl. Seite 22, ε). Von diesen Logarithmenmantissen stehen in der mit 0 bezeichneten Spalte die drei ersten Ziffern jedoch nur dann, wenn sie von den drei ersten Ziffern der vorhergehenden Logarithmenmantisse verschieden sind. Sind also bei einer Mantisse die drei ersten Ziffern nicht angegeben, so gelten die vorhergehenden (die Logarithmenmantissen mehrerer auf einander folgender Zahlen sind nur in den letzten Stellen verschieden). Demnach ist:

log 1001 = 3,0004341,
log 10010 = 4,0004341,
log 1009 = 3,0038912 und
log 10090 = 4,0038912.

5) In den übrigen Spalten, welche der Reihe nach mit 1, 2, 3 . . . 9 überschrieben sind, stehen die vier letzten Ziffern der Logarithmenmantissen der fünfzifferigen Zahlen und zwar da, wo die Horizontalreihe, die die Zehner enthält, mit der Vertikalreihe der Einer zusammentrifft. Die drei ersten Ziffern der Mantissen stehen in der mit 0 bezeichneten Spalte und sind für sämtliche Zahlen derselben Horizontalreihe gemeinsam. Wenn diese drei Ziffern nicht angegeben sind, so gelten die vorher gehenden; hat die erste der vier letzten Ziffern der Logarithmenmantisse einen Strich, so bedeutet dies, daß als erste drei Ziffern die zu nehmen sind, welche in der zunächst folgenden Zeile stehen. Hiernach ist:

log 10031 = 4,0013442
log 10032 = 4,0013875
log 10038 = 4,0016472
log 10047 = 4,0020364
log 10048 = 4,0020796.

6) Unter den mit P. P. bezeichneten Rubriken sind Tafeln enthalten, mit deren Hilfe man auch die Logarithmenmantissen von sechs-, sieben- und achtzifferigen Zahlen finden kann.

7) Die den Logarithmentafeln von Seite 188 an beigefügten Tafeln enthalten die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

§. 56. Gebrauch der Logarithmentafeln.

Um jeden beliebigen numerischen Ausdruck mit Hilfe der in §. 53 aufgestellten Sätze logarithmisch berechnen zu können, muß man wissen: I) wie Logarithmen zu gegebenen Zahlen und II) wie Zahlen zu gegebenen Logarithmen aufgesucht werden. Hierüber soll das Nachfolgende belehren. Dabei wird speziell auf die Vegaschen 7stelligen Logarithmen (von Bremiker) bezug genommen. *)

I. Das Aufsuchen der Logarithmen zu gegebenen Zahlen.

A. Erklärungen, Regeln und Musterbeispiele.

a) Das Aufsuchen der Logarithmen zu gegebenen ganzen Zahlen.

aa) Die Zahlen sind ein- bis fünfstellig.

Man findet den Logarithmus einer gegebenen ganzen Zahl von 1 bis 99 999, indem man zuerst die Kennziffer derselben bestimmt (§. 54, c, 1), dann die gegebene Zahl in der Logarithmentafel aufsucht, aus dieser die zu der Zahl gehörige Mantisse entnimmt und sie jener Charakteristik als Dezimalstellen anhängt. — Hiebei sind folgende Regeln zu beachten.

α) Die ein-, zwei- und dreistelligen Zahlen (also die Zahlen von 1 bis 999) findet man auf den Seiten 2 bis 5 in den mit N(=Numerus) bezeichneten Vertikalkolonnen; die dazu gehörigen Logarithmen (mit Weglassung der Kennziffern) stehen unmittelbar daneben in den mit Log. bezeichneten Vertikalkolonnen.

Beispiele. 1) log 3 = 0,4771213 . . . Seite 2
2) log 7 = 0,8450980 . . . „ 2
3) log 25 = 1,3979400 . . . „ 2
4) log 250 = 2,3979400 . . . „ 3

*) Wer mit dem Gebrauch dieser Logarithmentafeln genau vertraut ist, und sich volles Verständnis der nachfolgenden Regeln verschafft hat, dem wird dann auch die Benützung irgend einer andern, z. B. einer fünfstelligen keine Schwierigkeit mehr bereiten, zumal jeder Logarithmentafel eine Gebrauchsanweisung vorausgeht.

5) log 999 = 2,9995655 . . . „ 5
6) log 205 = 2,3117539 . . . „ 2.

β) Die vierstelligen Zahlen (also die Zahlen von 1000 bis 9999) findet man auf den Seiten 6 bis 185, und zwar nur in der ersten Vertikalreihe einer jeden Seite, nämlich nur in denjenigen Vertikalkolonnen, welche mit N(=Numerus) bezeichnet sind (vollständig angegeben sind jedoch nur diejenigen Zahlen, die an der Einerstelle eine Null haben, z. B. 1000, 1010, 1020, 1030 u. s. w. von den dazwischen liegenden sind nur die zwei letzten Stellen angegeben). Die Mantissen der zu diesen vierstelligen Zahlen gehörenden Logarithmen stehen unmittelbar neben (rechts) denselben in den mit 0 bezeichneten zweiten Vertikalkolonnen (die 3 ersten Ziffern der Mantisse sind nur dann angegeben, wenn sie von den 3 ersten Ziffern der unmittelbar vorhergehenden Mantissen verschieden sind; sind sie also nicht angegeben, so gelten die direkt vorhergehenden).

Beispiele. 1) log 1001 = 3,0004341 . . . Seite 6
2) log 1010 = 3,0043214 . . . „ 6
3) log 1122 = 3,0499929 . . . „ 8
4) log 1232 = 3,0906107 . . . „ 10
5) log 5165 = 3,7130703 . . . „ 89
6) log 9999 = 3,9999566 . . . „ 185.

γ) Auf den Seiten 6 bis 185 findet man auch die ein-, zwei- und dreizifferigen Zahlen und zwar auch in den ersten mit N bezeichneten Kolonnen — und zwar die einzifferigen, wenn man den in diesen Vertikalreihen stehenden, mit drei Nullen endenden vierstelligen Zahlen diese drei Nullen wegnimmt — die zweizifferigen, wenn man den in diesen Reihen stehenden vierstelligen Zahlen, die am Schluß wenigstens zwei Nullen haben, diese zwei Nullen wegnimmt — und die dreizifferigen endlich, wenn man von den vierstelligen, mit einer Null endenden Zahlen diese Null sich weggenommen denkt. Die Mantissen der zu allen diesen Zahlen gehörenden Logarithmen stehen rechts neben denselben in den mit 0 bezeichneten zweiten Vertikalreihen. (Man vergl. §. 54 c, 2, ε).

Beispiele.

1) log 2 = 0,3010300 . . . Seite 26 vergl. auch Seite 2
2) log 6 = 0,7781513 . . . „ 106 „ „ „ 2
3) log 30 = 1,4771213 . . . „ 46 „ „ „ 2

4) log 44 = 1,6434527 . . . „ 74 „ „ „ 2
5) log 238 = 2,3765770 . . . „ 33 „ „ „ 2
6) log 989 = 2,9951963 . . . „ 183 „ „ „ 5.*)

δ) Die fünfstelligen Zahlen (also die Zahlen von 10000 bis 99999) findet man auch auf den Seiten 6 bis 185 und zwar indem man den vierstelligen Zahlen, welche in den mit N bezeichneten Vertikalreihen stehen, der Reihe nach die Ziffern: 0, 1, 2, 3 . . . 9, mit welchen die übrigen Kolumnen überschrieben sind, als fünfte Ziffer anhängt (in der ersten mit N überschriebenen Spalte sind also die Zehner der vorgelegten fünfzifferigen Zahl aufzusuchen und in den andern die entsprechenden Einer). „Die vier letzten Ziffern des Logarithmus stehen da, wo die Horizontalreihe, welche den Zehnern entspricht, mit der Vertikalreihe der Einer zusammentrifft. Die drei ersten Ziffern des Logarithmus stehen in der mit 0 überschriebenen Reihe und sind für sämtliche Ziffern derselben Horizontalreihe gemeinsam. Wenn diese drei Ziffern nicht angegeben sind, so gelten die unmittelbar vorhergehenden, oder hat die erste der vier letzten Ziffern einen Strich, so gelten als erste drei Ziffern die, welche in der zunächst folgenden Zeile stehen." Angenommen, es sei der Logarithmus von 10038 zu suchen. Man geht Seite 6 in der ersten Vertikalreihe bis 1003 herunter und nun horizontal nach rechts bis in die mit 8 überschriebene Reihe. Hier findet sich die Zahl 6472. Dies sind die vier letzten Ziffern der zu suchenden Mantisse. Die drei ersten Ziffern hiezu finden sich in der mit 0 überschriebenen Reihe und betragen 001. Die zu suchende Mantisse heißt also 0016472 und der Logarithmus von 10038, da die Kennziffer 4 ist, 4,0016472.

Beispiele. 1) log 10010 = 4,0004341 . . . Seite 6
2) log 10100 = 4,0043214 . . . „ 6
3) log 10047 = 4,0020364 . . . „ 6*)

---

*) Aus der vorstehenden Regel folgt, daß in 7stelligen Tafeln die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 wegbleiben könnten, da dieselben schon in den Logarithmen der Zahlen von 1000 bis 100000 enthalten sind. Man läßt sie aber nicht weg, weil sie sich beim Aufsuchen der Logarithmen ein-, zwei- und dreistelliger Zahlen als sehr praktisch erweisen.

*) Beim Aufsuchen dieses Logarithmus war zu beachten, daß in der Tafel die erste der vier letzten Ziffern einen Strich hat.

4) log 10603 = 4,0254288 . . . „ 7
5) log 12864 = 4,1093760 . . . „ 11
6) log 15775 = 4,1979694 . . . „ 17
7) log 21587 = 4,3341923 . . . „ 29
8) log 78523 = 4,8949969 . . . „ 143.

ε) Die Logarithmen aller derjenigen Zahlen, welche Potenzen von 10 sind, nämlich: 1, 10, 100, 1000, 10000 u. s. w., bestehen nur aus der Kennziffer. Um denselben eine mit den andern Logarithmen übereinstimmende Form zu geben, ersetzt man die fehlenden Mantissenstellen durch Nullen.

Beispiele. 1) log 1 = 0,0000000
2) log 10 = 1,0000000
3) log 100 = 2,0000000.

bb) Die Zahlen sind mehr als fünfstellig.

1) Ist der Logarithmus einer mehr als fünfzifferigen Zahl zu suchen und sind die der fünften Ziffer dieser Zahl nachfolgenden Stellen Nullen, so bestimmt man die Kennziffer und sucht zu den fünf ersten Ziffern die Mantisse (Seite 22, ε).

Beispiele. 1) log 100100 = 5,0004341 . . . Seite 6
2) log 1124000 = 6,0507663 . . . „ 8
3) log 191900 = 5,2830750 . . . „ 24
4) log 437900000 = 8,6413749 . . „ 73
5) log 72500000 = 7,8603380 . . . „ 131.

2) Eine allgemeine Regel für das Auffinden der Logarithmen von beliebigen sechs- und mehrzifferigen Zahlen ergibt sich aus folgender Betrachtung.

α) Wenn man die Logarithmen von je zwei auf einander folgenden fünfzifferigen Zahlen subtrahiert, so ergibt sich, daß die Logarithmen nur in den drei letzten Dezimalstellen verschieden und daß die durch die Subtraktion entstandenen Differenzen für kleine Zwischenräume meistens einander gleich sind, z. B.

	Differenzen
log 88860 = 4,9487063	
	. . . 49
log 88861 = 4,9487112	
	. . . 49
log 88862 = 4,9487161	
	. . . 49
log 88863 = 4,9487210	
	. . . 49
log 88864 = 4,9487259	
	. . . 48
log 88865 = 4,9487307	
	. . . 49
log 88866 = 4,9487356	

β) Aus den vorstehenden Beispielen kann man den folgenden Schluß ziehen: *Die Differenzen der Logarithmen zweier oder mehrerer auf einander folgenden fünf- oder mehrzifferigen Zahlen sind den Differenzen der Zahlen nahezu proportional.* Nimmt also die Zahl 88860 um eine Einheit zu, so wird der zu ihr gehörige Logarithmus um die einfache Differenz 49 größer; wächst aber die Zahl 88860 um 2, 3, 4, 5 Einheiten, so wachsen die Mantissen der zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen beziehungsweise um das 2-, 3-, 4-, 5fache der Differenz 49.

γ) Findet dieses proportionale Wachsen der Logarithmen für fünfzifferige Zahlen statt, wenn sie um *ganze* Einheiten wachsen, so wird dasselbe umsomehr stattfinden, wenn die Zahlen nur um *Bruchteile*, wie $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{9}{100}$ u. s. w. wachsen. Wächst also eine fünfzifferige Zahl um den Bruch $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ u. s. w. bis $\frac{9}{10}$, oder um $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$ u. s. w., so wächst auch der zugehörige Logarithmus um beziehungsweise $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$ der Differenz zwischen dem Logarithmus dieser fünfzifferigen und dem Logarithmus der um eine Einheit größeren Zahl. Kehren wir zu unserem obigen Beispiel zurück und bestimmen log 88865,7.

	log 88865	=	4,9487307
	log 88866	=	4,9487356
	Differenz beider log	=	49
$\frac{7}{10}$ dieser Differenz		=	34,3
Mithin	log 88865,7	=	4,9487307
			+ 34,3*)
Oder	log 88865,7	=	4,9487341

*) Sind bei derartigen Fällen die zu addierenden Bruchteile kleiner als 0,5, so läßt man sie weg, sind sie größer als 0,5 so wird die letzte Stelle der Mantisse um *eine* Einheit erhöht.

δ) Zur Erleichterung der Berechnung dieser Proportionalteile sind für jede der auf der aufgeschlagenen Seite der Logarithmentafeln vorkommenden Differenzen kleine Tabellen beigefügt, welche sich in der mit: P. P. (partes proportionales, Proportionalteile) überschriebenen Spalte befinden. Diese Täfelchen geben nämlich die Zehntel der ganzen Differenz an, woraus sich dann auch die Hundertel und Tausendtel derselben leicht ergeben.

ε) Unter γ) haben wir gefunden, daß

log 88865,7 = 4,9487341 ist, folglich muß

log 888657 = 5,9487341 sein (§. 54, c, 2, ε). Oder ist log 23743,85 = 4,3755511, so ist

log 2374385 = 6,3755511. — Das im Vorstehenden entwickelte Verfahren läßt sich folgendermaßen allgemein formulieren:

3) Um den Logarithmus einer sechs- bis achtzifferigen Zahl zu finden, bestimmt man zuerst die Kennziffer, sucht dann zu den fünf ersten Ziffern der gegebenen Zahl die Mantisse und schreibt sie nieder; hierauf bestimmt man die Differenz zwischen den Logarithmen dieser fünfzifferigen und der um 1 größeren Zahl (man subtrahiert bloß in Gedanken die letzten Ziffern der ersten Mantisse von den letzten Ziffern der zweiten Mantisse), und sucht diese Differenz als Überschrift unter P. P. auf; sodann sucht man in dieser kleinen Tabelle die vor dem vertikalen Strich stehende Ziffer, welche der sechsten Ziffer der gegebenen Zahl entspricht, nimmt den rechts daneben stehenden Anteil jener Differenz und addiert denselben schließlich zu der zuerst niedergeschriebenen Mantisse. Ist die vorgelegte Zahl sieben- oder achtzifferig, so sucht man die siebente und achte Ziffer wieder in der ersten Spalte der kleinen Tafel und nimmt für die siebente Ziffer den zehnten, für die achte den hundertsten Teil des daneben stehenden Proportionalteiles und addiert die einzelnen Teile der Mantisse.

Beispiele. 1) log 194568 = 5,2890536 . . . Seite 24

Differenz 223, hievon auf 8 . . . + 178,4

log 194568 = 5,2890714

Denk- und Sprechweise. Die Kennziffer für 194568 ist 5; die Mantisse zu den fünf ersten Ziffern ist 2890536; die Differenz zwischen dieser und der nachfolgenden Mantisse beträgt 223; der Proportionalteil hievon für die *sechste* Ziffer 8 der gegebenen Zahl ist nach der mit 223 überschriebenen Tafel der Rubrik: P. P. gleich 178,4. Beide Teile addiert, erhält man 5,2890714 als gesuchten Logarithmus; der Bruchteil 4 fällt weg, weil er weniger als 0,5 beträgt.

2) log 8976543 = 6,9531070 . . . Seite 165
Diff. 49, hievon kommt auf 4 . . . . + 19,6
" " " 3 . . . . + 1,47
log 8976543 = 6,9531091

Denk- und Sprechweise. Die Kennziffer dieser siebenzifferigen Zahl ist 6; die Mantisse des Logarithmus zu den fünf ersten Ziffern beträgt 9531070 und die Differenz zwischen dieser und der folgenden Mantisse 49; für die *sechste* Ziffer 4 der gegebenen Zahl findet man in der mit 49 überschriebenen Rubrik P. P. den Proportionalteil 19,6 (denn $\frac{4}{10} \cdot 49 = 19{,}6$) und für die *siebente* Ziffer 3 den Proportionalteil 1,47 (denn $\frac{3}{10}$ von 49 ist 14,7, mithin $\frac{3}{100}$ $\frac{1}{10}$ von 14,7 = 1,47).

3) log 23743859 = 7,3755356 . . . Seite 33
Diff. 183, hievon kommt auf 8 . . . + 146,4
" " " 5 . . . + 9,15
" " " 9 . . . + 1,647
log 23743859 = 7,3755513

Erläuterung. Differenz = 183; für die *sechste* Ziffer 8 der gegebenen Zahl findet man in der mit 183 überschriebenen Spalte P. P. den Proportionalteil 146,4 (denn $\frac{8}{10} \cdot 183 = 146{,}4$), für die *siebente* Ziffer 5 den Proportionalteil 9,15 (denn $\frac{5}{100} \cdot 183 = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot 183$, $\frac{5}{10} \cdot 183$ ist aber nach der Tafel = 91,5, mithin $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot 183 = 9{,}15$) und für die *achte* Ziffer den Proportionalteil 1,647 (denn $\frac{9}{1000} \cdot 183 = \frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10} \cdot 183$, $\frac{9}{10} \cdot 183 = 164{,}7$, $\frac{1}{100} \cdot 164{,}7 = 1{,}647$, also $\frac{9}{1000} \cdot 183 = 1{,}647$).

4) Die siebenstelligen Logarithmentafeln sind für mehr als *achtzifferige* Zahlen nicht berechnet.

b) Das Aufsuchen der Logarithmen zu gegebenen gebrochenen und gemischten Zahlen.

aa) Die gebrochenen und gemischten Zahlen haben die Form von Dezimalbrüchen.

1) *Man findet den Logarithmus eines gegebenen unechten* (d. h. Ganze enthaltenden) *Dezimalbruches, indem*

man zunächst die Kennziffer der Ganzen bestimmt, dann sich das Komma wegdenkt, hierauf in der Tafel die Mantisse für die hiedurch entstandene Zahl nach den unter a) besprochenen Regeln aufsucht und schließlich diese Mantisse der Kennziffer beisetzt (man vergl. p. 20, Satz 2).

Beispiele:
1) log 8,5 = 0,9294189
2) log 32,8 = 1,5158738
3) log 74,6 = 1,8827488
4) log 99,9 = 1,9995655
5) log 4,08 = 0,6106601
6) log 9,99 = 0,9995655
} . . . vorst. Regel u. R. α pag. 26

7) log 234,7 = 2,3705131
8) log 2,347 = 0,3705131
9) log 24,75 = 1,3935752
10) log 1,001 = 0,0004341
} . . . vorst. Regel u. R. β) pag 27

11) log 95,729 = 1,9810435
12) log 74,878 = 1,8743542
13) log 7487,8 = 3,8743542
14) log 7,6325 = 0,8826668
15) log 44,361 = 1,6470013
16) log 362,45 = 2,5592481
} . . . vorst. Regel u. R. δ) pag 28

17) log 447,927 = 2,6512005
Diff. 97, hievon auf 7 . . . . + 67,9
log 447,927 = 2,6512073

18) log 35,27646 = 1,5474793
Diff. 123, hievon auf 4 . . . + 49,2
" " 6 . . . + 7,38
log 35,27646 = 1,5474850

19) log 84,827567 = 1,9285341
Diff. 51, hiev. kommt auf 5 . . . + 25,5
" " " 6 . . . + 3,06
" " " 7 . . . + 0,357
log 84,827567 = 1,9285370
} . . nach vorst. Regel sowie nach Regel 3, pag 31.

2) Der Logarithmus eines reinen Dezimalbruches wird gefunden, indem man zu diesem, als ganze Zahl betrachtet (man denkt sich also das Komma mit den direkt vor- und dahinterstehenden Nullen weg), die Mantisse sucht, derselben als Kennziffer 0 Ganze vorsetzt und als negative Charakteristik eine Zahl anfügt, welche so viele Einheiten hat, als dem Dezimalbruch Nullen vorangehen mit Einschluß der Null vor dem Komma (man vergleiche pag. 20, α).

Beispiele.

1) log 0,68 = 0,8325089 — 1 2) log 0,00768 = 0,8853612 — 3	vorst. Reg. u. Reg. α) pag. 26.
3) log 0,7679 = 0,8853047 — 1 4) log 0,05762 = 0,7605733 — 2 5) log 0,004618 = 0,6644539 — 3	vorsteh. Regel u. Reg. β) pag. 27.
6) log 0,28602 = 0,4563964 — 1 7) log 0,028602 = 0,4563964 — 2 8) log 0,0063817 = 0,8049364 — 3	vorst. Regel u. Reg. δ) pag. 28.
9) log 0,895278 = 0,9519540 — 1 Diff. 49, hiev. auf 8 . . . . + 39,2 Also log 0,895278 = 0,9519579 — 1 10) log 0,005370321 = 0,7299985 — 3 Diff. 81, hiev. auf 2 . . . . . + 16,2 " " 1 . . . . . + 0,81 Mith. log 0,005370321 = 0,7300002 — 3	vorsteh. Regel u. Reg. 3) pag. 31.

bb) Die gebrochenen und gemischten Zahlen haben die Form von gemeinen Brüchen.

1) Man findet den Logarithmus eines gewöhnlichen Bruches, indem man denselben entweder in einen Dezimalbruch verwandelt und dann wie unter aa) verfährt, oder indem man auf ihn den Lehrsatz e) pag. 11 anwendet, z. B. log $\frac{7}{8}$ ist entweder log 0,875 oder log 7 — log 8.

2) Den Logarithmus eines gewöhnlichen gemischten Bruches findet man, indem man denselben einrichtet und dann wie unter 1) verfährt, z. B. log $5\frac{1}{2}$ = log $\frac{11}{2}$ = log 5,5 oder = log 11 — log 2.

B. Übungsaufgaben.

Man soll nach den vorstehenden Regeln die Logarithmen folgender Zahlen bestimmen:

a) Von 8, 5, 11, 38, 113, 251, 346, 538 und 995.

b) Von 1007, 1115, 1237, 1365, 1768, 5637, 6005, 7878, 8001 und 9975.

c) Von: 10009, 10702, 17342, 24695, 35006, 58763, 63705, 88632 und 96745.

d) Von: 72, 720, 7200, 72000, 720000, 5630000 und 87640000.

e) Von: 112362, 243537, 864739, 972325, 1235721, 8546963, 45972846, 67002561 und 72332625.

f) Von: 1,8; 46,2; 3,42; 8,02; 9,75; — 4,325; 48,52; 325,2; 78,02; — 11,342; 455,02; 105,66; 9,0032; 6,4831; — 124,731; 6,71502; 7956,22; 5,327218; 746,3218 und 42,742185.

g) Von: 0,6; 0,13; 0,118; 0,0212; 0,00212; 0,1168; 0,8473; 0,64832; 0,084672 und 0,00084672.

II. Das Aufsuchen des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus.

A. Erklärungen, Regeln und Musterbeispiele.

Soll angedeutet werden, daß zu einem gegebenen Logarithmus die zu demselben gehörende Zahl (Numerus) aufzusuchen ist, so wird dies angedeutet durch num log, oder durch N log, z. B. num log 0,3010300. Ist also log 5 = 0,6989700, so ist umgekehrt num log 0,6989700 = 5. Bei dem Aufsuchen des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus hat man genau das unter I. über das Aufsuchen des Logarithmus zu einer gegebenen Zahl gelehrte Verfahren umzukehren. Hiebei können zwei Fälle eintreten: die gegebene Mantisse ist ganz genau in den Tafeln enthalten, oder sie steht nicht unmittelbar darin.

a) Die Logarithmenmantisse steht unmittelbar in den Tafeln.

Man sucht die drei ersten Ziffern der Mantisse (die Ziffern des Numerus hängen lediglich von der Mantisse ab) auf den Seiten 6 bis 185 in der mit 0 bezeichneten Spalte und die

vier andern Ziffern dieser Mantisse in einer der mit 0, 1, 2 . . 9 bezeichneten Rubriken, und zwar entweder in derselben Horizontalreihe, in welcher die drei ersten stehen oder in den nächstfolgenden Horizontalreihen (zu welchen auch jene drei ersten Ziffern gehören) oder auch in der nächst vorhergehenden Horizontalreihe, dann aber nur unter denjenigen Ziffern, die einen Strich haben. Nun schreibt man diejenigen vier Ziffern, welche in der mit N überschriebenen Vertikalkolumne und zugleich in derjenigen Horizontalreihe stehen, worin man die vier letzten Ziffern der Mantisse gefunden hat, heraus und fügt die dieser Horizontalreihe überschriebene Zahl jenen vier Ziffern als fünfte Ziffer bei. Hierauf bringt man in den gefundenen Ziffern des Numerus das Komma an. Dabei hat man zu beachten, daß die Kennziffer des gegebenen Logarithmus, wenn sie positiv ist, die um 1 verminderte Anzahl der ganzen Ziffern der zu suchenden Zahl angibt, und die Anzahl der den geltenden Ziffern vorangehenden Nullen, falls sie negativ ist.

Beispiele. 1) num log 4,8121644 = 64888.

Denk- und Sprechweise. Ich suche zuerst auf den Seiten 6 bis 185 die drei ersten Ziffern 812 der gegebenen log Mantisse in der mit 0 überschriebenen Spalte und finde sie auf Seite 115; die vier letzten Ziffern 1644 der Mantisse stehen in der nachfolgenden Horizontalreihe in der mit 8 bezeichneten Rubrik. Die in dieser Horizontalreihe in der Spalte N stehende vierzifferige Zahl ist 6488. Hiezu kommt als fünfte Ziffer 8, weil in der mit 8 überschriebenen Spalte die vier letzten Ziffern der Mantisse gefunden wurden. Die Ziffern des Numerus sind also 64888. Da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 4 ist, so muß der gesuchte Numerus fünfstellig sein. Derselbe ist also 64888.

2) num log 4,3431131 = 22035 . . . Seite 30
3) num log 4,0004341 = 10010 . . . „ 6
4) num log 4,0020364 = 10047 . . . „ 6
5) num log 3,6696887 = 4674 . . . „ 79

Erläuterung. Die Ziffern des zu suchenden Numerus sind 46740. Da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 3 ist, so muß der gesuchte Numerus vierstellig werden; deshalb schneidet man, von vorne gezählt, vier Stellen ab, wodurch man 4674,0 = 4674 erhält.

6) num log 2,9951963 = 989 Seite 183
7) num log 1,7708520 = 59 „ 104
8) num log 0,7781513 = 6 „ 106
9) num log 0,9294189 = 8,5 „ 156.

Erläuterung. Die Ziffern des zu suchenden Numerus sind 85000. Da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 0 ist, so muß der zugehörige Numerus einzifferig sein; deshalb trennt man, von vorne gezählt, durch ein Dezimalkomma 1 Stelle, die Ganzen ausdrückend, ab; hiedurch ergibt sich als Numerus 8,5000 = 8,5.

10) num log 1,7495044 = 56,17 auf Seite 98
11) num log 0,3705131 = 2,347 „ „ 32
12) num log 0,0004341 = 1,001 „ „ 6
13) num log 5,0004341 = 100100 „ „ 6.

Erläuterung. Die Ziffern des zu der gegebenen log Mantisse des Beispiels 13) gehörigen der Tafel entnommenen Numerus sind 10010. Da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 5 ist, so muß der gesuchte Numerus sechsstellig sein; deshalb hat man sechs Stellen abzutrennen, mithin, da der Numerus nur 5 Stellen enthält, eine Null anzuhängen. Hiedurch erhält man als Numerus 100100 (man vergl. pag. 29, 1).

14) num log 6,8974071 = 7896000 auf Seite 143
15) num log 7,9162960 = 82470000 „ „ 150
16) num log (0,0303973 — 2) = 0,010725 „ „ 7.

Erläuterung. Im Beispiel 16) hat der gegebene Logarithmus eine negative Kennziffer. Wie in den vorhergehenden Beispielen sucht man zuerst zu der Mantisse in den Tafeln den zugehörigen Numerus und schreibt denselben nieder. Dieser ist hier 10725. Diesem setzt man nun so viele Nullen vor, als die negative Kennziffer Einheiten hat, hier also zwei Nullen, sodaß die Ziffern des Numerus nunmehr sind 0010725. Trennt man nun schließlich die erste Null (links) durch ein Dezimalkomma ab, also 0,010725, so ist der dem gegebenen Logarithmus zugehörige Numerus gefunden (man vergl. pag. 21, Satz *d*) und pag. 34, Satz 2).

17) num log (0,6644539 — 3) = 0,004618 auf Seite 78
18) num log (0,9364635 — 4) = 0,0008639 „ „ 158
19) num log (0,8450980 — 1) = 0,7 „ „ 126
20) num log (0,8450980 — 5) = 0,00007 „ „ 126.

b) Die Logarithmenmantisse steht nicht unmittelbar in den Tafeln.

Man sucht die drei ersten Dezimalstellen der gegebenen Mantisse in der mit 0 bezeichneten Spalte und zu den vier letzten Ziffern die vier nächst kleineren in einer der mit 0, 1, 2 . . . 9 überschriebenen Rubriken. Den hiezu gehörigen fünfzifferigen Numerus schreibt man heraus, wodurch man bereits die fünf ersten Zif-

fern der zu suchenden Zahl erhält. Hierauf subtrahiert man die gefundenen vier nächst kleineren Ziffern von den gegebenen vier letzten und sucht den Rest in der zweiten Spalte der mit P. P. bezeichneten Rubrik. Um die betreffende Rubrik leichter zu finden, kann man zwischen der der gegebenen nächst kleinerer Mantisse und der letzterer nächstfolgenden die Differenz bilden. In der mit dieser Differenz überschriebenen Tafel sucht man obigen Rest. Ist diese Differenz genau vorhanden, so gibt die links daneben stehende Zahl die sechste Ziffer der so gesuchten Zahl. Ist aber die Differenz nicht genau vorhanden, so setzt man die neben dem nächst kleineren Proportionalteil stehende Ziffer als die sechste, subtrahiert diesen nächst kleineren Proportionalteil von jener Differenz, multipliciert diese neue Differenz mit 10 und nimmt als siebente Stelle des Numerus die neben der so erhaltenen Zahl in der Rubrik P. P. stehende Ziffer, falls man diese Zahl genau hier findet. Ist dies nicht der Fall, so sucht man auf ähnliche Weise auch noch die achte Ziffer des Numerus. Für etwa zu bestimmende weitere Ziffern (wenn die Kennziffer es erfordert) setzt man Nullen.

Beispiele. 1) num log 5,1053160 = 12744 + 3 = 127443.
— 3058

Diff.: 102

Denk- und Sprechweise. Ich suche zuerst auf den Seiten 6 bis 185 der Logarithmentafel die drei ersten Ziffern 105 der gegebenen Logarithmen-Mantisse in der mit 0 überschriebenen Spalte und finde sie Seite 11; die vier letzten Ziffern 3160 der Mantisse stehen nicht unmittelbar in der Tafel; die vier letzten Ziffern der der gegebenen Mantisse nächst kleineren Mantisse, welche in der Tafel steht, sind 3058. Der zu der so bestimmten Mantisse 1053058 gehörige Numerus ist 12744. Dies sind die fünf ersten Ziffern der zu suchenden Zahl. Die Differenz zwischen den beiden Mantissen 1053160 und 1053058 ist 102 und zwischen 1053058 und der in der Tafel stehenden nächst größeren Mantisse 1053398 beträgt 340. Daher suche ich in der mit P. P. bezeichneten Rubrik unter der Überschrift 340 die Differenz 102 hinter dem Vertikalstrich unter den Proportionalteilen. Da dieselbe ganz genau hier zu finden ist, so ist die links dabei stehende Zahl 3 die sechste Ziffer der gesuchten Zahl. Die Ziffern des zu suchenden Numerus sind also 127443. Da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 5 ist, so muß der gesuchte Numerus 127443 sein.

2) num log 4,7319584 = 53945 + 0,9 = 53945,9.
— 9512

Diff.: 72

3) num log 0,7813427 = 6,0442 + 5 + 4 = 6,044254
— 3388

1. Diff.: 39
— 36

2. Diff.: 3
10 . 3 = 30
— 28,8

3. Diff.: 1,2

Erläuterung. Die der gegebenen Mantisse nächst kleinere ist nach Seite 106 7813388 und der dazu gehörige Numerus 60442, oder, da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 0 ist, 6,0442. Die Differenz zwischen den Mantissen 7813427 und 7813388 ist 39 und zwischen 7813388 und der nächst größeren 7813460 ist 72. In dem mit 72 überschriebenen Täfelchen der Rubrik P. P. findet sich der Proportionalteil 39 nicht genau; der nächst kleinere ist 36 und die daneben stehende Zahl 5 die sechste Ziffer der gesuchten Zahl. Multipliciert man den restierenden Proportionalteil 3 mit 10, so findet man für den diesem Proportionalteil 30 nächst kleineren 28,8 die siebente Ziffer 4.

4) num log 2,5833980 = 383,17 + 5 + 7 + 5 = 383,17575
— 3915

1. Diff.: 65
— 56,5

2. Diff.: 8,5
10 . 8,5 = 85
— 79,1

3. Diff. 5,9
10 . 5,9 = 59

5) num log (0,6320109 — 2) = 0,042855 + 9 + 3 = 0,04285593.
— 0015

1. Diff.: 94
— 90,9

2. Diff.; 3,1
10 . 3,1 = 31
— 30,3

B. Übungsaufgaben.

Man bestimme zu den nachfolgenden Logarithmen die Zahlen!

a): 1) 3,66763397	2) 3,9932157	3) 3,6022771
4) 1,6361869	5) 1,3025474	6) 0,3025474
7) 4,9259667	8) 4,5052585	9) 4,5642398
10) 2,6683580	11) 1,8940723	12) 0,8940723
13) 5,6704778	14) 5,8449739	15) 7,6649990
16) 0,8450980	17) 1,7160033	18) 2,6541765
19) 0,6532125 — 1	20) 0,6139475 — 1	21) 0,6139475 — 2
22) 0,9330264 — 3	23) 0,8450980 — 1	24) 0,3979400 — 5

b): 25) 2,1198935 26) 0,0177969
27) 0,5786294 — 1 28) 1,0742664

Resultate.

a): 1) 4652	2) 9845	3) 4002
4) 43,27	5) 20,07	6) 2,007
7) 84327	8) 32008	9) 36664
10) 465,97	11) 78,356	12) 7,8356
13) 468250	14) 699800	15) 46238000
16) 7	17) 52	18) 451
19) 0,45	20) 0,4111	21) 0,04111
22) 0,0085709	23) 0,7	24) 0,000025

b) 25) 131,79331 26) 1,04183
27) 0,3789914 28) 11,864965.

§. 57. Berechnung gegebener Zahlenausdrücke mit Hilfe der Logarithmen.

A. Erklärungen.

Soll ein gegebener Zahlenausdruck mit Hilfe der Logarithmen berechnet werden, so setzt man denselben gleich x, logarithmiert die dadurch entstandene Gleichung nach den Gesetzen d) bis g) Seite 10), d. h. zerlegt den gegebenen Zahlenausdruck in die Logarithmen seiner Bestandteile, sucht die Logarithmen der einzelnen Zahlen nach den Regeln unter I. des §. 56 auf und führt die Operationen aus, welche in dem logarithmierten Ausdruck zwischen den einzelnen Gliedern angedeutet sind. Zu dem auf diese Weise erhaltenen Lo-

garithmus sucht man schließlich nach den Regeln II. des §. 56 den entsprechenden Numerus.

B. Übungsaufgaben.

I. Einfache Zahlenausdrücke.

a) Berechnung von Produkten.

Ein Produkt wird logarithmisch berechnet, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren bestimmt, diese Logarithmen addiert und zu der so erhaltenen Logarithmensumme die zugehörige Zahl sucht. Diese ist das gesuchte Produkt. Der Grund des Verfahrens beruht auf Satz d) pag. 10.

$$1)\ x = 136\ .\ 2512$$

$$\log x = \log 136 + \log 2512$$

$$\log x = \begin{cases} 2,1335389 \\ 3,4000196 \end{cases}$$

$$\log x = 5,5335585$$

$$\text{num} \log 5,5335585 = 34163 + 2 = 341632$$

$$\begin{array}{r} -\ 5560 \\ \hline \text{Diff.: } 25 \end{array}$$

Hiernach ist num log x = 341632

Oder x = 136 . 2512 = 341632.

Anmerkung. Es entsteht die Frage, ob man durch logarithmische Rechnung zu absolut richtigen Resultaten gelangt. Hierüber ist folgendes zu beachten. Die Logarithmen der weitaus meisten Zahlen sind Irrationalzahlen (nur die der Potenzen von 10 sind rational), folglich kann der wahre Wert derselben nicht angegeben werden; die Tafeln können also nur Näherungswerte derselben enthalten. In den siebenstelligen Tafeln sind bloß sieben Dezimalstellen desselben angegeben. Von diesen ist die siebente Dezimalstelle nicht streng richtig, da bei der Berechnung der Logarithmentafeln, bei welchen auch die Kenntnis der achten u. s. w. Stelle nötig ist, diese siebente Stelle um 1 vergrößert wurde, wenn die darauf folgende achte Dezimale 5 oder größer als 5 war. Diese Abweichung von der Richtigkeit kann, obgleich sie unbedeutend ist, unter Umständen das Resultat einer Rechnung ungenau machen. Hätte man z. B. 5 Logarithmen zu addieren und wären die siebenten Dezimalstellen

derselben zu groß, so müßte auch das Resultat zu groß ausfallen; wären dagegen die siebenten Dezimalstellen zu klein, so würde auch, wegen Vernachlässigung des Betrags, der auf die achte und neunte Dezimalstelle käme, das Resultat zu klein werden. Dasselbe kann auch eintreten, wenn man einen Logarithmus mit einer großen Zahl zu multiplicieren hat.

2) 314 . 6 . 82 . 135 = ? Resultat: 20855884.

3) x = 10,99 . 2,37

log x = log 10,99 + log 2,37

$$\log x = \begin{cases} 1,0409977 \\ 0,3747483 \end{cases}$$

log x = 1,4157460

num log 1,4157460 = 26,046 + 3 = 26,0463

— 7410

Diff.: 50

Also ist num log x = 26,0463

Oder: x = 26,0463.

4) 243,5768 . 36,4684 = ? Resultat. 8882,855.

5) x = 0,07432 . 17,356

log x = log 0,07432 + log 17,356

$$\log x = \begin{cases} 0,8711057 - 2 \\ 1,2394496 \end{cases}$$

log x = 2,1105553 — 2

Oder: log x = 0,1105553

num log 0,1105553 = 1,2898 + 9 + 8 = 1,289898

— 5224

1. Diff.: 329

— 302,4

2. Diff.: 26,6

26,6 . 10 = 266

Hiernach ist num log x = 1,289898

Oder: x = 1,289898

Erläuterung. Logarithmen, welche aus einer positiven Mantisse, der 0 Ganze voraus gehen, und aus einer negativen Kennziffer bestehen (es sind die Logarithmen echter Dezimalbrüche), nennt man halbnegative, gemischte oder binomische Logarithmen, z. B. log 0,07432 = 0,8711057 — 2. Dieselben könnte man durch Ausführung der

algebraischen Addition in ganz negative Logarithmen verwandeln, z. B. log 0,07432 = 0,8711057 — 2 = — 1,1288943. Dies thut man jedoch in der Regel nicht, sondern läßt sie, wie vorstehendes Beispiel zeigt, in ihrer zweiteiligen Form stehen. *) — Hat man solche halbnegative Logarithmen zu addieren, zu subtrahieren, mit Zahlen zu multiplicieren oder zu dividieren, so verfährt man hiebei wie bei den entsprechenden Operationen zusammengesetzter Größen. — Treten im Verlauf von logarithmischen Rechnungen Logarithmen mit positiven und zugleich negativen Kennziffern auf, wie z. B. oben 2,1105553 — 2, so führt man die algebraische Addition der Kennziffer aus, wodurch sich entweder ein vollständig positiver oder ein halbnegativer Logarithmus ergibt.

6) 1,5148 . 0,2616 = ? Resultat. 0, 39627163.

7) x = 0,6785 . — 105,995

$$\log x = \log 0{,}6785 + \log 105{,}995(n)$$

$$\log x = \begin{cases} 0{,}8315499 - 1 \\ 2{,}0252854\ (n) \end{cases}$$

$$\log x = 2{,}8568353 - 1$$

Oder: $\log x = 1{,}8568353\ (n)$

num log 1,8568353 = 71,917 + 6 + 2 = 71,91762 (n)
— 8316

1. Diff.: 37
— 36

2. Diff.: 1
1 . 10 = 10

Hiernach ist num log x = 71,91762 (n)
Oder: x = — 71,91762.

Erläuterung. Wenn in einem mit Logarithmen zu berechnenden Ausdruck negative Zahlen vorkommen, so untersucht man zuerst, welchen Einfluß dieselben auf das Endresultat haben. Dann betrachtet man dieselben einstweilen als absolute Zahlen, berechnet den Ausdruck logarithmisch und gibt dem Resultat das ihm zukommende Vorzeichen. Dabei ist es zweckmäßig, den Logarithmus einer absoluten Zahl, die nachträglich

*) Nur in dem einen Fall, daß man mit einem gemischten Logarithmus zu dividieren hat, muß man ihn ganz negativ machen.

negativ zu nehmen ist, mit einem in Klammern beigefügten n zu bezeichnen. Wird das Resultat positiv, so kann diese Bezeichnung wegbleiben.

b) Berechnung von Quotienten.

Ein Quotient wird logarithmisch berechnet, indem man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendus subtrahiert und zu der erhaltenen Differenz als Logarithmus die zugehörige Zahl bestimmt. Diese ist der gesuchte Quotient. Der Grund dieses Verfahrens beruht auf Satz e, Seite 11.

$$8)\ x = 107134 : 4658$$

$$\log x = \log 107134 - \log 4658$$

$$\log x = \begin{cases} 5,0299273 \\ 3,6681995 \end{cases}$$

$$\log x = 1,3617278$$

$$\text{num} \log 1,3617278 = 23$$

Mithin $x = 23$.

9) $756,602 : 19,25 = ?$ Resultat. 39,304.

$$10)\ x = 17,356 : 0,07432$$

$$\log x = \log 17,356 - \log 0,07432$$

$$\log x = \begin{cases} 1,2394496 \\ 0,8711057 - 2 \end{cases}$$

$$(-) \qquad (+)$$

$$\log x = 0,3683439 + 2$$

Oder $\log x = 2,3683439$

$$\text{num} \log 2,3683439 = 233,5306$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \hline 120 \end{array}$$

Mithin $x = 233,5306$.

Erläuterung. Bei der Subtraktion halbnegativer Logarithmen verfährt man wie bei der Subtraktion anderer zusammengesetzter Größen, man verwandelt nämlich die Vorzeichen des Subtrahendus in die entgegengesetzten und addiert. Es ist nämlich: $1,2394496 - (0,8711057 - 2) = 1,2394496 - 0,8711057 + 2 = 0,3683439 + 2 = 2,3683439$ (man vergl. auch Erläuterung pag. 42).

11) 0,017675 : 0,125 = ? Resultat. 0,1414.

12) $x = 0,0073 : 0,098657$

$\log x = \log 0,0073 - \log 0,098657$

$$\log x = \begin{cases} \overset{(+1)}{0,8633229} - 3 \\ \overset{(-1)}{0,9941279} - 2 \end{cases}$$

$\log x = 0,8691950 - 2$

num log $0,8691950 - 2 = 0,07399375$

$$\begin{array}{r} 06 \\ \hline 44 \\ 41,3 \\ \hline 2,7 \end{array}$$

Mithin $x = 0,07399375$.

Erläuterung. Wollte man die Subtraktion von (0,8633229 — 3) — (0,9941279 — 2) wirklich ausführen, so würde man einen negativen Logarithmus erhalten, da der Logarithmus des Divisors größer als der des Dividendus ist. Um diesen zu vermeiden, vergrößert man die Charakteristik des Minuendus um so viele Einheiten, als gerade nötig sind, um die Subtraktion zu ermöglichen und hängt aber auch diese zugefügten Einheiten dem Minuendus als negative Kennziffer an, damit derselbe seinen ursprünglichen Wert behält.

13) 0,103305 : 21,3 = ? Resultat. 0,00485.

Zusatz. Ist der Divisor oder der Dividend, oder sind beide negativ, so findet die Erläuterung auf Seite 43 Anwendung.

c) Berechnung von Potenzen.

Eine Potenz wird logarithmisch berechnet, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliciert und zu dem erhaltenen Produkt als Logarithmus die zugehörige Zahl bestimmt. Diese ist die gesuchte Potenz. Der Grund des Verfahrens beruht auf Satz f) Seite 12.

14) $x = 5,6^3$

$\log x = 3 \cdot \log 5,6$

$\log x = 0,7481880 \cdot 3$

$\log x = 2,2445640$

$$\text{num log } 2{,}2445640 = 175{,}616$$

492

148

Mithin $x = 5{,}6^3 = 175{,}616$.

15) $2{,}5746^{12} = ?$ Resultat. 84823,78.

16) $x = 0{,}98763^4$

$\log x = 4 \cdot \log 0{,}98763$

$\log x = (0{,}9945943 - 1) \cdot 4$

$\log x = 3{,}9783772 - 4$

$\log x = 0{,}9783772 - 1$

$\text{num log } 0{,}9783772 - 1 = 0{,}9514309$

68

40

Mithin $x = 0{,}9514309$.

17) $(-0{,}03456)^3 = ?$ 18) $(-0{,}034)^4 = ?$

Erläuterung. Ist die Basis eine negative Zahl, so berechnet man die Potenz der gleich großen absoluten Zahl und bestimmt nachträglich das Vorzeichen der Potenz (§. 27,3).

19) $x = 1{,}2345^{-5}$

$\log x = -5 \cdot \log 1{,}2345$

$\log x = 0{,}0914911 \cdot -5$

$\log x = -0{,}4574555$

Oder $\log x = 1 - 0{,}4574555 - 1$

„ $\log x = 0{,}5425445 - 1$

$\text{num log } 0{,}5425445 - 1 = 0{,}3487743$

391

54

50

40

Mithin $x = 0{,}3487743$.

Erläuterung. Ist, wie im vorliegenden Fall, der Exponent eine negative Zahl, so wird der Logarithmus der gesuchten Potenz negativ. Um einen solchen negativen Logarithmus, der sich im Verlauf einer logarithmischen Rechnung ergibt, in einen andern Logarithmus mit positiver Mantisse aber negativer Kennziffer zu verwandeln, subtrahiert man den Logarithmus von einer ganzen Zahl, die um 1 größer ist als seine

Kennziffer und hängt diese Zahl, damit an dem Wert des Logarithmus nichts geändert wird, der Differenz als negative Kennziffer an (hiedurch wird eigentlich zu dem negativen Logarithmus eine gleiche Anzahl positiver und negativer Einheiten addiert; im Beispiel 19 wurde + 1 und — 1 dazu addiert).

20) $x = 0{,}024^{-2}$

$\log x = -2 \,.\, \log 0{,}024$

$\log x = (0{,}3802112 - 2) \,.\, -2$

$\log x = -0{,}7604224 + 4$

Oder $\log x = 3{,}2395776$

num log 3,2395776 = 1736,11

47

29

25,1

3,9

Also ist $x = 0{,}024^{-2} = 1736{,}11$

21) $x = 23{,}90087^{1{,}1087023}$

$\log x = 1{,}1087023 \,.\, \log 23{,}90087$

Oder $\log x = 1{,}1087023 \,.\, 1{,}3784137$

$\log \log x = \log 1{,}1087023 + \log 1{,}3784137$

$\log \log x = \begin{cases} 0{,}0448149 \\ 0{,}1393796 \end{cases}$

$\log \log x = 0{,}1841945$

num log 0,1841945 = 1,5282504

1802

143

142

100

Hiernach ist num log (log x) = 1,5282504

Oder $\log x = 1{,}5282504$

num log 1,5282504 = 33,74818

480

24

12,9

11,1

111

Also num log x = 33,74818
Oder x = 33,74818.

Erläuterung. Im vorstehenden Beispiel ist der Exponent eine vielzifferige Zahl. Daher entsteht bei der Multiplikation des Logarithmus der Basis mit diesem Exponenten eine umständliche Rechnung. Um diese nicht ausführen zu müssen, kann man nochmals logarithmieren.

d) Berechnung von Wurzeln.

Eine Wurzel wird logarithmisch berechnet, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert und zu dem erhaltenen Quotienten als Logarithmus die zugehörige Zahl bestimmt. Diese ist die gesuchte Wurzel. Dieses Verfahren gründet sich auf Satz g) Seite 12.

22) $x = \sqrt{697225}$

$\log x = \frac{1}{2} \cdot \log 697225$

$\log x = 5{,}8433729 \cdot \frac{1}{2}$

$\log x = 2{,}9216865$

num log 2,9216865 = 835

Mithin $x = \sqrt{697225} = 835.$

Erläuterung. Kommt im Verlauf einer logarithmischen Rechnung der Fall vor, daß ein Logarithmus durch eine Zahl zu dividieren ist und geht diese Division bis in die 7. Stelle nicht auf, so erhöht man die 7. Dezimale um 1, falls die 8. entweder 5 oder größer als 5 würde (in siebenstelligen Tafeln stehen nur siebenstellige Mantissen).

23) $\sqrt{1522756} = ?$ 24) $\sqrt{41075281} = ?$ Result. 1234; 6409.

25) $x = \sqrt[3]{9663597}$

$\log x = \frac{1}{3} \cdot \log 9663597$

$\log x = 6{,}9851389 \cdot \frac{1}{3}$

$\log x = 2{,}3283796$

num log 2,3283796 = 213

Mithin x = 213.

26) $\sqrt[3]{17173512} = ?$ 27) $\sqrt[3]{41{,}063625} = ?$ Res. 258; 3,45.

$$28)\ x = \sqrt[3]{0,804357}$$
$$\log x = \tfrac{1}{3} \cdot \log 0,804357$$
$$\log x = (\overset{(+2)}{0},9054489 \overset{(-2)}{-} 1) \cdot \tfrac{1}{3}$$
$$\log x = 0,9684829 - 1$$
$$\text{num} \log 0,9684829 - 1 = 0,93$$
Mithin $x = 0,93$.

Erläuterung. Ist, wie im vorliegenden Fall, ein binomischer Logarithmus durch eine ganze Zahl zu dividieren und ist diese Zahl nicht ohne Rest in der negativen Kennziffer enthalten, so addiert man, um einen Logarithmus mit gebrochener Kennziffer zu vermeiden, zu der negativen Kennziffer gerade so viele negative Einheiten als nötig sind, damit die negative Kennziffer durch jene Zahl ohne Rest teilbar wird und addiert zugleich, um den Wert des Logarithmus nicht zu verändern, zu den 0 Ganzen vor der Mantisse die gleiche Anzahl positiver Einheiten. Im vorliegenden Beispiel wurde + 2 und — 2 addiert, wodurch der Logarithmus 2,9054489 — 3 entstand, dessen negative Kennziffer jetzt durch 3 ohne Rest teilbar ist.

29) $\sqrt[3]{0,032768} = ?$ 30) $\sqrt[3]{0,5235988} = ?$ Res.: 0,32; 0,80599.

$$31)\ x = \sqrt[7]{-78125}$$
$$\log x = \tfrac{1}{7} \cdot \log 78125\ (n)$$
$$\log x = 4,8927900\ (n) \cdot \tfrac{1}{7}$$
$$\log x = 0,6989700\ (n)$$
$$\text{num} \log 0,6989700 = 5\ (n)$$
Mithin $x = -5$.

Erläuterung. Nach den Gesetzen der Wurzelausziehung ergibt eine ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl ein negatives Resultat. Zur Bezeichnung dieses negativen Ergebnisses kann man dem logarithmischen Ausdruck den Buchstaben (n) beifügen (Seite 43).

31) $\sqrt[12]{567348} = ?$ 32) $\sqrt{0,007} = ?$ Res: 3,01638.

Vermischte Aufgaben zu I.

$$33)\ x = \frac{6892 \cdot 0,023}{4,512}$$

$\log x = \log 6892 + \log 0,023 + \text{D. E.} \log 4,512 - 10$

$$\log x = \left\{\begin{array}{l} 3{,}8383453 \\ 0{,}3617278 - 2 \\ 9{,}3456309 - 10 \end{array}\right.$$

$$\log x = 13{,}5457040 - 12$$
$$\log x = 1{,}5457040$$
$$\text{num} \log 1{,}5457040 = 35{,}13209$$

Mithin $x = 35{,}13209$

Erläuterung. Die Ergänzung einer beliebigen Zahl a, welche kleiner als 10 ist, zu der Zahl 10 nennt man die *dekadische Ergänzung* jener Zahl a und bezeichnet sie durch: D. E. a. So ist z. B. D. E. 7 = 3, d. h. 3 ist die dekadische Ergänzung von 7. Die dekadische Ergänzung einer Zahl a findet man, indem man diese Zahl a von 10 *subtrahiert*, z. B. D. E. 3,48876 = 10 — 3,48876 = 6,51124. Statt eine Zahl b von einer anderen Zahl a zu *subtrahieren*, kann man die *dekadische Ergänzung* der Zahl b minus 10 zu a *addieren*, denn: $a - b = a + (10 - b) - 10$. Von diesem Verfahren kann man mit Vorteil Gebrauch machen, wenn man von der Summe mehrerer Logarithmen einen andern Logarithmus oder die Summe mehrerer Logarithmen zu *subtrahieren* hat. Man bildet nämlich in diesem Falle die dekadischen Ergänzungen der zu subtrahierenden Logarithmen (was auf rasche Weise in Gedanken geschieht) und addiert diese dekadischen Ergänzungen minus 10 zu den ersteren Logarithmen.

34) $x = (1{,}2347 \,.\, 2{,}3457)^2$

$$\log x = 2\,(\log 1{,}2347 + \log 2{,}3457)$$

$$\log x = \left\{\begin{array}{l} 0{,}0915614 \\ 0{,}3702725 \,.\, 2 \end{array}\right.$$

$$\log x = 04618339 \,.\, 2$$
$$\log x = 0{,}9236678$$
$$\text{num} \log 0{,}9236678 = 8{,}38818.$$
$$x = 8{,}38818.$$

35) $x = (5 : 4)^8$

$$\log x = 8\,(\log 5 - \log 4)$$

$$\log x = \left\{\begin{array}{l} 0{,}6989700 \\ 0{,}6020600 \,.\, 8 \end{array}\right.$$

$$\log x = 0{,}0969100 \,.\, 8$$

$$\log x = 0{,}7752800$$
$$\text{num}\log 0{,}7752800 = 5{,}960462$$
$$x = 5{,}960462.$$

36) $x = 39{,}679^{\frac{15}{4}}$

$$\log x = \tfrac{15}{4} \,.\, \log 39{,}679$$
$$\log x = 1{,}5985607 \,.\, 15 \,.\, \tfrac{1}{4}$$
$$\log x = 5{,}9946026$$
$$\text{num}\log 5{,}9946026 = 987649$$
$$x = 987649.$$

II. Zusammengesetzte Zahlenausdrücke.

Zusammengesetzte Zahlenausdrücke werden durch die gleichzeitige Anwendung mehrerer oder sämtlicher der unter I. genannten Regeln logarithmisch berechnet. Hiebei hat man vor allem wohl zu beachten, ob in dem gegebenen Ausdruck algebraische Summen vorkommen oder nicht. Ist dies nicht der Fall, so können die unter I. angeführten Regeln unmittelbar auf die zu berechnenden Ausdrücke angewandt werden. Kommen dagegen algebraische Summen darin vor, so muß man zunächst, da der Logarithmus einer Summe keiner anwendbaren Umformung fähig ist, die einzelnen Glieder derselben berechnen und zu einer Zahl vereinigen. Hierauf erst können die unter I. angeführten Gesetze Anwendung finden.

a) Ausdrücke ohne algebraische Summen.

1) $$x = \sqrt[3]{\frac{47{,}327}{8{,}4794}} \,.\, \sqrt{\frac{9{,}3488}{13{,}5727}}\,.$$

a) Logarithmierung dieses Ausdrucks nach den Sätzen d, g und e Seite 10, 12 und 11:

$$\log x = \tfrac{1}{3}[\log 47{,}327 - \log 8{,}4794] + \tfrac{1}{2}[\log 9{,}3488 - \log 13{,}5727].$$

b) Bestimmung des Logarithmus hievon:

α) Logarithmus des ersten Faktors:

	log 47,327 =	1,6751090
	log 8,4794 =	0,9283651
Differ. beider log:		0,7467439
Mit $\frac{1}{3}$ mult.:		0,2489146

β) Logarithmus des zweiten Faktors:

$$\log 9{,}3488 = \overset{(+1)}{0{,}9707559}\,{}^{(-)}$$

$$\log 13{,}5727 = \underline{1{,}1326662} \text{ (Seite 45, Erl.)}$$

$$\text{Differ. beider log: } \overset{(+1)}{0{,}8380897} \overset{(-1)}{-} 1$$

$$\text{Mit } \tfrac{1}{2} \text{ multipliciert: } 0{,}9190448 - 1 \text{ (Seite 49, Erl.)}$$

γ) Logarithmus beider Faktoren also:

$$\begin{array}{r} 0{,}2489146 \\ \underline{0{,}9190448 - 1} \\ 1{,}1679594 - 1 \end{array}$$

Oder $\log x = 0{,}1679594$ (Seite 42, Erl.)

c) Bestimmung des hiezu gehörigen Numerus:

$$\text{num } \log 0{,}1679594 = 1{,}472175$$

$$\begin{array}{r} \underline{-\ 9373} \\ \text{1. Diff.: } 221 \\ \underline{-\ 206{,}5} \\ \text{2. Diff.: } 14{,}5 \\ 14{,}5 \,.\, 10 = 145 \end{array}$$

Hiernach ist num $\log x = 1{,}472175$ oder: $x = 1{,}472175$.

$$2)\quad x = \frac{0{,}090793^2 \,.\, 8{,}2793^3}{824{,}3372 \,.\, 5{,}675195} \,.\, \sqrt[5]{\frac{83972{,}69^2 \,.\, 585{,}4736}{7063{,}473 \,.\, 2{,}941778}}\,.$$

a) Logarithmierung dieses Ausdrucks nach den Sätzen d bis g Seite 10 bis 12:

$$\log x = 2 \,.\, \log 0{,}090793 + 3 \,.\, \log 8{,}2793 - (\log 824{,}3372 + \log 5{,}675195) + \tfrac{1}{5} \,.\, [2 \,.\, \log 83972{,}69 + \log 585{,}4736 - (\log 7063{,}473 + \log 2{,}941778)]$$

b) Bestimmung des Logarithmus hievon:

1) Logarithmus des ersten Faktors:

α) des Zählers:

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}090793 = & 0{,}9580524 - 2 \\ \text{Mit 2 multipl.:} & 1{,}9161048 - 4 \\ \text{Oder:} & 0{,}9161048 - 3 \ldots 1) \\ \log 8{,}2793 = & 0{,}9179936 \\ \text{Mit 3 mult.:} & 2{,}7539808 \ \ldots\ldots 2) \\ \text{log 1) und 2) add.:} & 3{,}6700856 - 3 \\ \text{Oder:} & 0{,}6700856 \end{array}$$

β) des Nenners:

log 824,3372 = 2,9161049
log 5,675195 = 0,7539808
Beide log add.: 3,6700857

2) Logarithmus des zweiten Faktors:

α) des Zählers:

log 83972,69 = 4,9241381
Mit 2 mult.: 9,8482762 . . . 3)
log 585,4736 = 2,7675073 . . . 4)
log 3) und 4) add.: 12,6157835

β) des Nenners:

log 7063,473 = 3,8490183 . . . 5)
log 2,941778 = 0,4686099 . . . 6)
log 5) und 6) add.: 4,3176282

Demnach ist der Logarithmus des ganzen Ausdrucks, oder

$\log x = 0{,}6700856 - 3{,}6700857 + \frac{1}{5} \cdot (12{,}6157835 - 4{,}3176282)$
$\log x = 0{,}6700856 - 3{,}6700857 + 1{,}6596311$
$\log x = 0{,}6596310 - 2$

c) Bestimmung des hiezu gehörigen Numerus:

num log 0,6596310 — 2 = 0,04567

Hiernach ist num log x = 0,04567 oder x = 0,04567.

3) $x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{680{,}70809^3 \sqrt{2}}$

a) Logarithmierung dieses Ausdrucks nach den Sätzen d, g und f Seite 10 bis 12:

$\log x = \log 0{,}5 + \frac{1}{2} [3 \cdot \log 680{,}70809 + \frac{1}{2} \log 2]$.

b) Bestimmung des Logarithmus hievon:

log 0,5 = 0,6989700 — 1 . . . . 1)
log 680,70809 = 2,8329610
Mit 3 mult.: 8,4988830 . . . . . . 2)
log 2 = 0,3010300
Mit $\frac{1}{2}$ mult.: 0,1505150 . . . . . . 3)
log 2) und 3) add: 8,6493980
Durch 2 div.: 4,3246990 . . . . . . 4)
log 1 u. 4 add.: 5,0236690 — 1
Oder log x: 4,0236690

c) Bestimmung des Numerus hiezu:

num log 4,0236690 = 10560,12
Mithin num log x = 10560,12
Oder: x = 10560,12.

4) $\frac{452}{6,4258}\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}} = ?$ 5) $\sqrt[9]{0,05\sqrt[7]{6 . \sqrt[5]{0,8}}} = ?$

6) $\frac{\sqrt[3]{-842} . (-36)^6}{\sqrt[7]{-472} . \sqrt[3]{-0,32}} = ?$ 7) $\frac{14,342^3 . \sqrt[5]{-45}}{0,32^4} = ?$

b) Ausdrücke mit algebraischen Summen.

8) $x = \sqrt{261,72^2 + 196,29^2}$

Gemäß der Seite 51 gegebenen Erklärung muß man hier zunächst die Summanden des Radikanden einzeln berechnen, zu einer Zahl vereinigen und aus dieser dann die Quadratwurzel ziehen.

a) Berechnung des Radikanden:

α) Des ersten Summanden:

log 261,72² = 2 . log 261,72
log 261,72 = 2,4178369
Mit 2 mult.: 4,8356738
num log 4,8356738 = 68497,35 . . . 1)

β) Des zweiten Summanden:

log 196,29² = 2 . log 196,29
log 196,29 = 2,2928982
Mit 2 multipliciert: 4,5857964
num log 4,5857964 = 38529,77 . . 2)

γ) Der Summe:

1 und 2) addiert: 107027,12. Der gegebene Ausdruck geht somit über in:

$x = \sqrt{107027,12}$

b) Berechnung dieses letztern Ausdrucks:

$\log x = \frac{1}{2} . \log 107027,12$

$\log 107027,12 = 5,0294938$

Mit $\frac{1}{2}$ mult.: 2,5147469

num log 2,5147469 = 327,15

Mithin x = 327,15.

$$9)\ x = \sqrt[10]{\sqrt[5]{638,27} - 0,53^3 . \sqrt[3]{0,0025}}$$

a) Berechnung des Radikanden:

α) Des Minuendus:

$\log \sqrt[5]{638,27} = \frac{1}{5} . \log 638,27$

$\log 638,27 = 2,8050044$

Mit $\frac{1}{5}$ mult.: 0,5610009

num log 0,5610009 = 3,639158 . . . 1)

β) Des Subtrahendus:

$\log 0,53^3 . \sqrt[3]{0,0025} = 3 . \log 0,53 + \frac{1}{3} . \log 0,0025$

$\log 0,53 = 0,7242759 - 1$

Mit 3 mult.: 2,1728277 — 3 . . . 2)

$\log 0,0025 = 0,3979400 - 3$

Mit $\frac{1}{3}$ mult.: 0,1326467 — 1 . . . 3)

2) u. 3 addiert: 2,3054744 — 4

Oder: 0,3054744 — 2

num log 0,3054744 — 2 = 0,02020572 . . 4)

γ) Der Differenz:

numerus 1) minus numerus 4): 3,6189523. Demnach heißt der Ausdruck jetzt:

$$x = \sqrt[10]{3,6189523}$$

b) Berechnung dieses letzteren Ausdrucks:

$\log x = \frac{1}{10} . \log 3,6189523$

$\log 3,6189523 = 0,5585829$

Mit $\frac{1}{10}$ mult.: 0,0558583

num log 0,0558583 = 1,137256

Mithin x = 1,137256.

$$10)\ x = \sqrt[17]{\frac{63 + 47\sqrt[4]{5729}}{\sqrt[8]{2709}}} - 0{,}12076$$

a) Berechnung von $47\sqrt[4]{5729}$

$$\log 47\sqrt[4]{5729} = \log 47 + \tfrac{1}{4} \cdot \log 5729$$

$\log 47 = 1{,}6720979 \quad . \ . \ . \quad 1)$

$\log 5729 = 3{,}7580788$

Mit $\frac{1}{4}$ multipliciert: $0{,}9395197 \quad . \ . \ . \quad 2)$

log 1) u. 2) addiert: $2{,}6116176$

num log $2{,}6116176 = 408{,}90047$. Der gegebene Ausdruck geht somit über in:

$$x = \sqrt[17]{\frac{63 + 408{,}90047}{\sqrt[8]{2709}}} - 0{,}12076 \text{ oder:}$$

$$x = \sqrt[17]{\frac{471{,}90047}{\sqrt[8]{2709}}} - 0{,}12076 .$$

b) Berechnung des ersten Summanden:

$$\log \sqrt[17]{\frac{471{,}90047}{\sqrt[8]{2709}}} = \tfrac{1}{17}\left[\log 471{,}90047 - \tfrac{1}{8} \cdot \log 2709\right]$$

$\log 471{,}90047 = 2{,}6738504 \quad . \ . \ . \quad 3)$

$\log 2709 = 3{,}4328090$

Mit $\frac{1}{8}$ multipl.: $0{,}4291011 \quad . \ . \ . \quad 4)$

3) minus 4): $2{,}2447493$

Durch 17 dividiert: $0{,}1320441$

num log $0{,}1320441 = 1{,}3553271$. Mithin geht der gegebene Ausdruck über in:

$x = 1{,}3553271 - 0{,}12076$, woraus sich:

$x = 1{,}2345671$ ergibt.

11) $\frac{\sqrt{0,043}}{0,2} - \sqrt[3]{0,9987} + 0,42^6 = ?$

12) $\sqrt[7]{4,5 + \sqrt[5]{0,08}} + 2,1234 = ?$

13) $\sqrt[4]{4 + \sqrt[3]{3 + \sqrt{2}}} + 0,6842 = ?$

14) $2 + \sqrt[4]{2 + \sqrt[3]{237}} + [\sqrt[6]{21^5} + 2]^4 = ?$

15) $\frac{3,125^5 - \sqrt[3]{9}}{5,345^3 + 2,796\sqrt[7]{7}} = ?$

§. 58. Anwendung der Logarithmen zur Flächen- und Körperrechnung.*)

1) Die Diagonale eines Quadrats beträgt 1,048 m; wie groß ist dessen Seite?

Auflösung. Die zu suchende Quadratseite mit x bezeichnet, erhält man nach dem Pythagoreer die Gleichung: $x^2 + x^2 = 1,048^2$ oder $2x^2 = 1,048^2$ oder:

$$x = \sqrt{\frac{1,048^2}{2}} = \frac{1,048}{\sqrt{2}} = \frac{1,048 \,.\, \sqrt{2}}{2} = 0,524\sqrt{2}$$

Logarithmisch berechnet, findet sich:

$\log x = \log 0,524 + \frac{1}{2} \log 2$

$\log 0,524 = 0,7193313 - 1 \quad . \quad . \quad . \quad 1)$

$\log 2 = 0,3010300$

Mit $\frac{1}{2}$ mult.: $0,1505150 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$

*) Die Lehrsätze, welche bei den nachfolgenden Aufgaben zur Anwendung kommen, werden als bekannt vorausgesetzt. Hier handelt es sich bloß um die logarithmische Berechnung der Resultate dieser Aufgaben. — Sämtliche Aufgaben sind der von mir bearbeiteten „Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie" entnommen.

1) und 2) add.: $\log x = 0{,}8698463 - 1$

num log $0{,}8698463 - 1 = 0{,}741048$

Folglich $x = 0{,}741048$ m.

2) Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 8 m. Wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflösung. Nach Seite 29 der Aufgabensammlung ist die Höhe desselben: $\frac{1}{2} . 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, mithin sein Inhalt $x = \frac{1}{2} . 8 . 4\sqrt{3}$ oder: $x = 4^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$. Daher:

$$\log x = \log 16 + \tfrac{1}{2} . \log 3$$

$\log 16 = 1{,}2041200$ . . . 1)

$\log 3 = 0{,}4771213$

Durch 2 div.: $0{,}2385606$ . . . 2)

1) und 2) add. $\log x = 1{,}4426806$

num log $1{,}4426806 = 27{,}71281$

Mithin $x = 27{,}71281$ qm.

3) Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 17,73568 qdm. Wie groß ist dessen Seite und Höhe?

Andeutung. Vergleiche Aufgabensammlung p. 29, Nr. 3

4) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 582 m, 486 m und 135 m lang. Wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflösung. Bezeichnet man die drei Seiten des Dreiecks mit a, b und c und den halben Umfang desselben mit s, so ist nach Seite 32 der Aufgabensammlung der Inhalt desselben: $x = \sqrt{s(s-c)(s-b).(s-a)}$. Nun ist $s = (582 + 486 + 135) : 2 = 601{,}5$ m; $s - c = 601{,}5 - 135 = 466{,}5$ m; $s - b = 601{,}5$ m $- 486$ m $= 115{,}5$ m und $s - a = 601{,}5$ m $- 582$ m $= 19{,}5$ m. Der obige allgemeine Ausdruck geht somit über in: $x = \sqrt{601{,}5 \,.\, 466{,}5 \,.\, 115{,}5 \,.\, 19{,}5}$. Diesen Ausdruck logarithmiert, ergibt sich:

$$\log x = \tfrac{1}{2} . (\log 601{,}5 + \log 466{,}5 + \log 115{,}5 + \log 19{,}5)$$

$\log 601{,}5 = 2{,}7792356$

$\log 466{,}5 = 2{,}6688516$

$\log 115{,}5 = 2{,}0625820$

$\log 19{,}5 = 1{,}2900346$

Diese 4 Logar. addiert: $8{,}8007038$

Durch 2 dividiert: $4{,}4003519$

num log $4{,}4003519 = 25139{,}225$

Mithin $x = 25139{,}225$ qm.

5) Die Peripherie eines Kreises beträgt 1,3188 m. Wie groß ist der Inhalt desselben?

Resultat 0,138474 qm (Aufgabensammlung p. 43).

6) Der körperliche Inhalt eines Würfels beträgt 32,768 cbm. Wie groß ist die Diagonalachse x desselben?

Auflösung. Nach Seite 3 der Aufgabensammlung ist:

$$x = \sqrt[3]{32,768} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt[6]{27 \,.\, 32,768^2}.$$ Es ist also:

$$\log x = \tfrac{1}{6} \,.\, (\log 27 + 2 \,.\, \log 32,768)$$

$$\log 27 = 1,4313638 \quad . \; . \; . \; 1)$$

$$\log 32,768 = 1,5154499$$

Mit 2 multipl.: 3,0308998

Zu 1) addiert: 4,4622636

Durch 6 dividiert: 0,7437106

num log 0,7437106 = 5,542563

Mithin x = 5,542563 m.

7) Die Diagonalachse eines Würfels beträgt Am. Wie groß ist das Volumen x desselben?

Resultat. $x = \frac{1}{9} \,.\, A^3 \sqrt{3}$, also $\log x = 3 \log A + \frac{1}{2} \log 3 - \log 9$ (Seite 4).

8) Der körperliche Inhalt eines gleichseitigen Cylinders beträgt 169,56 cbm. Wie groß ist dessen Mantel?

Andeutung. Aufgabensammlung p. 35.

9) Der körperliche Inhalt einer Kugel beträgt 113,04 cbm. Wie groß ist der Radius x derselben?

10) Eine eiserne Kugel wiegt 105,975 kg. Welchen Durchmesser hat dieselbe, wenn das spezifische Gewicht des Eisens 7,5 ist?

§. 59. Anwendung der Logarithmen zur Auflösung der Exponentialgleichungen.

A. Erklärungen.

1) Gleichungen, in denen die Unbekannte als Exponent vorkommt, sei dies als Potenz- oder als Wurzelexponent, nennt man Exponentialgleichungen, z. B. $a^x = b$. Dieselben können einfache oder Gleichungen von höheren Graden sein.

2) Die Auflösung solcher Gleichungen kann man im allgemeinen nur auf dem Wege logarithmischer Behandlung ausführen, nämlich dadurch, daß man die betreffenden Gleichungen auf grund des

Satzes: Gleiche Größen haben gleiche Logarithmen (selbstverständlich für einerlei Basis) beiderseits logarithmiert, denn hiedurch werden die Exponenten (die Unbekannten) als solche beseitigt und in Faktoren verwandelt. Die so entstandenen Gleichungen werden dann nach den bekannten Regeln weiter behandelt.

3) Die Auflösung der Exponentialgleichungen ist in dieser Weise jedoch nur möglich, wenn sich dieselben auf die Form $a^x = b$ zurückführen lassen. Hiernach können Exponentialgleichungen, deren Seiten aus mehreren, durch + oder — verbundenen Gliedern bestehen, z. B. $a^x + b_x = m$, auf die angegebene Weise im allgemeinen nicht gelöst werden (pag. 16, Aufgabe 2). Die nachfolgenden Beispiele zeigen die Art der Auflösung logarithmischer Gleichungen.

B. Übungsaufgaben.

1) $2_x = 256$

Beiderseits logarithmiert: $x \,.\, \log 2 = \log 256$

x isoliert: $x = \dfrac{\log 256}{\log 2}$

Das ist: $x = \dfrac{2{,}4082400}{0{,}3010300}$

Oder: $x = 8.$

Erläuterung. Wenn die beiden Größen 2^x und 256 einander gleich sind, dann müssen auch die Logarithmen derselben gleich sein, da zu gleichen Größen gleiche Logarithmen gehören. Die Logarithmierung der linken Seite 2^x ergibt $x \,.\, \log 2$ nach dem Satz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Exponenten multipliciert mit dem Logarithmus der Basis (pag. 12, f.).

2) $3^{x-3} \,.\, 4^{x-4} = 432$

Beiderseits logarithm.: $(x - 3) \log 3 + (x - 4) \log 4 = \log 432$

Klammern gelöst: $x \log 3 - 3 \log 3 + x \log 4 - 4 \log 4 = \log 432$

Transponiert: $x(\log 3 + \log 4) = \log 432 + 3 \log 3 + 4 \log 4$

x isoliert: $x = \dfrac{\log 432 + 3 \log 3 + 4 \log 4}{\log 3 + \log 4}$

Das ist: $x = \dfrac{2{,}6354837 + 1{,}4313639 + 2{,}4082400}{0{,}4771213 + 0{,}6020600}$

Oder: $x = \dfrac{6{,}4750876}{1{,}0791813}$

Mithin: $x = 6.$

3) $3^{\frac{3x}{x+1} + 4} = 729$

$3^{\frac{3x + 4x + 4}{x+1}} = 729$

$$3^{\frac{7x+4}{x+1}} = 729$$

$$\frac{7x + 4}{x + 1} . \log 3 = \log 729$$

$$\frac{7x + 4}{x + 1} = \frac{\log 729}{\log 3}$$

$$\frac{7x + 4}{x + 1} = 6$$

$$7x + 4 = 6x + 6$$

$$x = 2.$$

4) $\sqrt[2x]{50625} = 15$

$$\frac{1}{2x} . \log 50625 = \log 15$$

$$2x . \log 15 = \log 50625$$

$$2x = \frac{\log 50625}{\log 15}$$

$$2x = \frac{4,7043650}{1,1760913}$$

$$2x = 4$$

$$x = 2.$$

5) 1) $3^x . 4^y = 3981312$

2) $5^x . 2^y = 400000$

Gl. 1 logarithmiert: 3) $x . \log 3 + y . \log 4 = \log 3981312$

„ 2) „ 4) $x . \log 5 + y . \log 2 = \log 400000$

Oder: 5) $x . 0,4771213 + y . 0,6020600 = 6,6000262$

„ 6) $x . 0,6989700 + y . 0,3010300 = 5,6020600$

Gl. 6 mit 2 mult.: 7) $x . 1,3979400 + y . 0,6020600 = 11,2041200$

Gl. 5 von Gl. 7 subt.: 8) $x . 0,9208187 = 4,6040938$

x isoliert: $x = 4,6040938 : 0,9208187 = 5$

Diesen Wert in Gleichung 6) substituiert, erhält man:

9) $5 . 0,6989700 + y . 0,3010300 = 5,6020600$

Oder: $3,4948500 + y . 0,3010300 = 5,6020600$

„ $y . 0,3010300 = 2,1072100$

Also: $y = 2,1072100 : 0,3010300 = 7.$

6) $1000 . \sqrt[x]{10000} = 10^x$

7) $1700 (1 - 1,0325^{-x}) = 1027,6$

Resultate. 6) x = 4 oder — 1; 7) x = 29,006.

Siebenter Abschnitt.

Von den Progressionen.

Erstes Kapitel.

Die Progressionen im allgemeinen.

§. 60. Begriff der Progression.

1) Unter einer Progression oder Reihe versteht man eine Folge von Zahlen, von denen jede nachfolgende aus der vorhergehenden nach einem und demselben arithmetischen Gesetze gebildet wird. So ist z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 . . . . eine Reihe; diese ist so gebildet, daß jede nachfolgende Zahl um 2 größer ist als die vorhergehende.

2) Die einzelnen Zahlen einer Reihe heißen die Glieder derselben und werden von links nach rechts gezählt. Man unterscheidet sie inbezug auf ihre Stellung in der Reihe. Die Zahl, welche angibt, die wie vielte Stelle ein Glied in einer Reihe einnimmt, heißt Stellenzeiger, Zeiger oder Index. Dasjenige Glied einer Reihe, von welchem man bei der Bildung derselben ausgeht, nennt man das erste Glied oder das Anfangsglied und bezeichnet es meistens durch a. Das Glied, welches den allgemeinen Stellenzeiger n hat, also in der Reihe die unbestimmte nte Stelle einnimmt, heißt das nte oder allgemeine Glied der Reihe. Ein Ausdruck, der für jeden Wert von n die Summe der n Glieder liefert, heißt die Summenformel, das summierende oder das summatorische Glied der Reihe und wird mit s bezeichnet. Das letzte Glied einer Reihe wird das Endglied genannt und durch t bezeichnet.

3) Eine Reihe interpolieren heißt, zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern andere einschalten, so daß die entstehende Reihe wieder eine Reihe derselben Art wird.

§. 61. Die Verschiedenheit der Progressionen.

1) Nach der Art und Weise, wie in einer Reihe das nachfolgende Glied aus dem vorhergehenden entsteht, unterscheidet man zwei Hauptarten von Reihen: arithmetische und geometrische Reihen.

2) Entsteht in einer Reihe jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden dadurch, daß zu dem letzteren eine bestimmte Zahl addiert wird, so nennt man eine solche Reihe eine arithmetische; wird dagegen in einer Reihe das vorhergehende Glied mit einer gewissen Zahl multipliciert, um das nachfolgende Glied zu erhalten, so heißt eine solche Reihe eine geometrische. So ist z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . eine arithmetische, 2, 4, 8, 16, 32, 64 dagegen eine geometrische Progression. Die Zahl, welche man zu jedem Gliede einer arithmetischen Progression addieren muß, um das nachfolgende Glied zu erhalten, heißt die Differenz und diejenige, womit jedes Glied einer geometrischen Reihe zu multiplicieren ist, um das nachfolgende Glied zu bekommen, heißt der Quotient oder Exponent der Reihe.

3) Eine Reihe nennt man steigend, wenn jedes folgende Glied größer ist als das nächst vorhergehende und fallend, wenn jedes Glied kleiner ist wie das vorhergehende. So ist z. B.

a) 1, 4, 7, 10, 13 . . . eine steigende arithmetische Reihe mit der Differenz 3;

b) 17, 12, 7, 2, — 3, — 8, — 13, — 18 . . . eine fallende arithmetische Reihe mit der Differenz − 5;

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 . . . eine steigende geometrische Reihe mit dem Quotienten 2 und

d) 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ . . . eine fallende geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{3}$.

4) Eine Reihe heißt endlich, wenn die Anzahl der Glieder eine beschränkte ist und unendlich, wenn die Anzahl der Glieder eine unbeschränkte ist.

5) Arithmetische Reihen, bei welchen die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern konstant ist, heißen arithmetische Reihen der ersten Ordnung oder niedere arithmetische Reihen; eine Reihe von Zahlen dagegen, bei welchen die Differenzen ungleich und erst die Differenzen dieser oder einer

späteren Differenzenreihe konstant sind, nennt man arithmetische Reihen höherer Ordnung oder höhere arithmetische Reihen und zwar arithmetische Reihen von der zweiten, dritten u. s. w. Ordnung, je nachdem erst die Glieder der zweiten, dritten u. s. w. Differenzenreihe konstant sind. So ist z. B.:

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, denn die Glieder der ersten Differenzenreihe hievon, nämlich 2, 2, 2 u. s. w. sind konstant.

b) Die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36 . . . bilden eine Reihe der zweiten Ordnung, denn die aus der Hauptreihe 1, 4, 9, 16, 25, 36 hervorgehende erste Differenzenreihe 3, 5, 7, 9, 11 hat noch keine konstanten Glieder, sondern erst die aus der letzteren hervorgehende, also zweite, Differenzenreihe 2, 2, 2, 2, 2 . . .

c) die Kubikzahlen bilden eine Reihe dritter Ordnung; denn:

Hauptreihe:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343 . . .
1. Differenzenreihe:	7,	19,	37,	61,	91,	127 . . .	
2. „		12,	18,	24,	30,	36 . . .	
3. „			6,	6,	6,	6 . . .	

6) Eine Reihe von Brüchen, deren Zähler gleich sind, deren Nenner aber eine arithmetische Progression bilden, heißt eine harmonische Reihe, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ . . .

Zweites Kapitel.

Die arithmetischen Progressionen *).

§. 62. Erklärungen.

1) Eine arithmetische Progression ist, wie schon im vorigen §. gezeigt wurde, eine Folge von Zahlen, von denen jede nachfolgende aus der vorhergehenden dadurch entsteht, daß zu der vorhergehenden eine und dieselbe Zahl, welche man die Differenz der Reihe nennt, addiert wird. Ist die Differenz positiv, so heißt die Reihe steigend, ist sie negativ, dann wird die Reihe fallend genannt, z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . und 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7 . . .

---

*) Im folgenden kommen nur die niederen arithmetischen Progressionen zur Besprechung.

2) In einer arithmetischen Reihe kommen fünf Größen inbetracht, nämlich:

das Anfangsglied, bezeichnet durch a,
die Differenz, „ „ d,
die Anzahl der Glieder, „ „ n,
das letzte Glied, „ „ t und
die Summe oder das summatorische Glied der Reihe, das mit s bezeichnet wird.

3) Die allgemeine Form einer arithmetischen Progression, sowohl der steigenden als auch der fallenden ist:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d},\ \overset{6}{a+5d}\ \ldots$$

Hierin ist a das erste Glied, d die Diefferenz und die Ziffern 1, 2, 3 u. s. w. sind die Stellenzeiger. Hiernach kann die arithmetische Reihe 2, 5, 8, 11, 14, 17 . . . auch, da ihre Differenz 3 ist, so geschrieben werden:

$$\overset{1}{2},\ \overset{2}{2+3},\ \overset{3}{2+2\,.\,3},\ \overset{4}{2+3\,.\,3},\ \overset{5}{2+4\,.\,3},\ \overset{6}{2+5\,.\,3}\ \ldots$$

4) Bei den arithmetischen Progressionen sind hauptsächlich zwei Aufgaben zu lösen; die eine besteht in der Bestimmung des sogenannten allgemeinen, bezw. letzten Gliedes t der Reihe, und die andere hat es mit der Bestimmung der Summe s sämtlicher Glieder der Reihe zu thun. Darüber soll der nachfolgende §. belehren.

§. 63. Die beiden Fundamentalgleichungen der arithmetischen Reihen.

1) Jedes Glied einer arithmetischen Reihe besteht aus dem ersten Gliede und der so vielfachen Differenz, als der Zeiger des nächst vorhergehenden Gliedes Einheiten hat.

Beweis. Nach dem vorhergehenden §. ist die allgemeine Form einer arithmetischen Reihe folgende:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d},\ \overset{6}{a+5d}\ \ldots$$

Daraus ersieht man leicht, daß das 2. Glied aus der Summe des ersten Gliedes a und der $2-1=1$fachen Differenz d, das dritte Glied aus der Summe des ersten Gliedes a und der $3-1=2$fachen Differenz d,

das 4. Glied aus der Summe des ersten Gliedes a und der 4 — 1 = 3fachen Differenz d, mithin das nte Glied aus der Summe des ersten Gliedes a und der n — 1fachen Differenz d besteht. Das nte oder allgemeine Glied heißt demnach: a + (n — 1)d. Hat eine Reihe n Glieder, so ist das nte Glied zugleich das letzte. Dieses Glied mit t bezeichnet, erhält man daher t = a + (n — 1)d als die erste Fundamentalgleichung der arithmetischen Reihen. Ist die Reihe eine fallende, so ist d, mithin auch das Produkt, in welchem d vorkommt, negativ; daher geht für diesen Fall die vorige Gleichung in die folgende über: t = a — (n — 1)d. — Das Gesagte veranschauliche man sich auch noch auf folgende Weise:

1	2	3	4	5	6	7	8
1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29 ... oder
1,	1+1.4,	1+2.4,	1+3.4,	1+4.4,	1+5.4,	1+6.4,	1+7.4 ...

Aus der Gleichung t = a + (n — 1)d folgt, daß das letzte Glied t einer arithmetischen Reihe aus dem ersten Gliede a und der Anzahl n der Glieder derselben sofort gefunden werden kann. Angenommen, es sei das 12te Glied der Reihe 1, 5, 9, 13 . . . zu bestimmen. Dasselbe besteht der allgemeinen Formel zufolge aus der Summe des ersten Gliedes 1 und der 12 — 1 = 11fachen Differenz, welche in diesem Fall 4 ist. Demnach ist dieses Glied

$$1 + (12 - 1) . 4 = 1 + 11 . 4 = 1 + 44 = 45.$$

2) Die Summe s aller Glieder einer arithmetischen Progression (die Summe der arithmetischen Progression) wird gefunden, indem man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Zahl der Glieder multipliciert und das Produkt durch 2 dividiert.

Beweis. Suchen wir die Richtigkeit dieses Satzes zunächst an einem Zahlenbeispiel zu beweisen. Die zu summierende Reihe sei:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

oder

1, 1+2, 1+2.2, 1+3.2, 1+4.2 . . . . 23 — 4.2, 23 — 3.2, 23 — 2.2, 23 — 2, 23

Aus der aufmerksamen Betrachtung dieser Reihe ergibt sich folgendes: Die Summe des ersten und letzten Gliedes derselben beträgt 1 + 23 = 24. Das zweite Glied der Reihe ist um die einfache Differenz 2 größer als das erste und das vorletzte um die einfache Differenz 2 kleiner als das letzte; mithin muß auch die Summe des zweiten und vorletzten Gliedes der Reihe gleich der Summe des ersten und letzten, nämlich gleich 24

sein; es ist also $1 + 23 = 24$ und auch $(1 + 2) + (23 - 2) = 24$. Ebenso ist auch die Summe des dritten und drittletzten Gliedes gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes, nämlich gleich 24. Daraus folgt, daß in einer arithmetischen Reihe die Summe des ersten und letzten Gliedes gleich ist der Summe je zweier Glieder, die von den beiden Enden der Reihe gleich weit abstehen; denn das eine Glied wird um ebenso viel größer, als das andere kleiner wird. Wollen wir also die Summe obiger Reihe schneller und bequemer als durch Addition aller Glieder finden, so brauchen wir nur das erste und letzte Glied zu addieren und diese Summe mit der halben Zahl der Glieder zu multiplicieren, denn die Summe des ersten und letzten Gliedes, nämlich 24, muß so oft mal vorhanden sein, als die Reihe Gliederpaare enthält. Die gesuchte Summe obiger Reihe muß also sein: $\frac{1}{2} \cdot 12(1 + 23) = 144$. — Zu demselben Resultat gelangt man auch auf folgende Weise. Bezeichnet man die zu suchende Summe der obigen Reihe mit s, so ist:

$$s = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$$

Und $$s = 23 + 21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$$

Folglich $$2s = 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24$$

Oder: $$2s = 12 \cdot 24$$

Oder: $$2s = 12 \cdot (1 + 23)$$

Mithin: $$s = \tfrac{1}{2} \cdot 12(1 + 23).$$

Hier ist also die Reihe zweimal hingeschrieben, doch so, daß die entgegengesetzten Enden unter einander stehen. Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man als Summe derselben $2s = 12 \cdot (1 + 23)$. Da dies aber offenbar die doppelte Summe der gegebenen Reihe ist, so erhält man als einfache Summe derselben: $s = \frac{1}{2} \cdot 12(1 + 23)$. — Das Gesagte gilt für jede arithmetische Reihe; daher erhält man allgemein als Summe s einer solchen, wenn das Anfangsglied a, das letzte Glied t und die Anzahl der Glieder n ist, $s = \frac{1}{2}n(a + t)$. Dies ist die zweite Fundamentalgleichung der arithmetischen Reihen. — Allgemein geführt, gestaltet sich der Beweis wie folgt. Die allgemeine Form der arithmetischen Reihe ist: $a, a + d, a + 2d \ldots . t - 2d, t \quad d, t$; denn ist das letzte Glied derselben t, so ist das vorletzte $t - d$ und das drittletzte $t - 2d$ u. s. w. Daher:

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) \ldots (t - 2d) + (t - d) + t$$

Und: $s = t + (t - d) + t - 2d \ldots (a + 2d) + (a + d) + a$

B. Gl. add.: $2s = (a + t) + (a + t) + (a + t) \ldots (a + t) + (a + t) + (a + t)$

Das ist: $2s = n(a + t)$, wenn n Glieder vorhanden sind,

Also: $s = \frac{1}{2}n(a + t)$, w. z. b. w.

3) Aus Vorstehendem folgt, daß die beiden Fundamentalgleichungen der arithmetischen Reihen sind:

$$1)\ t = a + (n - 1)d$$
$$2)\ s = \frac{1}{2}n(a + t).$$

§. 64. Die aus den beiden Fundamentalformeln der arithmetischen Reihen hervorgehenden Gleichungen.

1) Dem Vorhergehenden zufolge existieren zwischen den in einer arithmetischen Progression in betracht kommenden fünf Größen a, d, n, t und s zwei von einander unabhängige Gleichungen, nämlich:

$$t = a + (n - 1)d \quad \ldots \text{Gleichung 1)}$$
$$s = \frac{1}{2}n(a + t) \quad \ldots \text{Gleichung 2)}$$

Es fragt sich nun, wieviel und welche Gleichungen sich von diesen beiden Fundamentalformeln ableiten lassen. Untersuchen wir das.

2) Zunächst ergeben sich unmittelbar aus jeder dieser beiden Gleichungen drei weitere, denn die darin vorkommenden vier Größen hängen so von einander ab, daß aus je dreien derselben die vierte folgt. Man findet diese sechs Gleichungen, indem man Gleichung 1) und 2) nach den darin enthaltenen Größen auflöst. Also:

a) Aus Gleichung 1): $t = a + (n - 1)d$

α) Nach a aufgel.: $a = t - (n - 1)d \quad \ldots$ Gleichung 3)

β) „ n „ $n = \frac{t - a}{d} + 1 \quad \ldots$ Gleichung 4)

γ) „ d „ $d = \frac{t - a}{n - 1} \quad \ldots$ Gleichung 5)

b) Aus Gleichung 2): $s = \frac{n}{2}(a + t)$

α) Nach n aufgelöst: $n = \frac{2s}{a + t} \quad \ldots$ Gleichung 6)

β) Nach a aufgelöst: $a = \frac{2s}{n} - t$ . . . Gleichung 7)

γ) „ t „ $t = \frac{2s}{n} - a$ . . . Gleichung 8)

3) Ferner erhält man drei weitere Gleichungen dadurch, daß man nach einander für je eine der in Gleichung 2) vorkommenden Größen t, a und n ihre Werte aus Gleichung 1) substituiert, die genannten Größen also aus Gleichung 2) eliminiert. Nämlich:

a) Durch Elimination von t. Aus Gl. 1) ist $t=a+(n-1)d$. Diesen Wert für t in Gl. 2) gesetzt, kommt:

$$s = \tfrac{1}{2}n[a + a + (n - 1)d]$$

oder $s = \tfrac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$ . . . Gleichung 9)

b) Durch Elimination von a. Aus Gl. 1) ist $a = t - (n - 1)d$. Daher:

$$s = \tfrac{1}{2}n[t - (n - 1)d + t]$$

oder $s = \tfrac{1}{2}n[2t - (n - 1)d]$ . . . Gleichung 10)

c) Durch Elimination von n. Aus Gl. 1) ist $n = (t - a) : d + 1$. Daher:

$$s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{t - a}{d} + 1\right) . (a + t)$$

oder $s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t + a)(t - a)}{2d}$ . . . Gleichung 11).

4) Gerade so wie sich aus den beiden Gleichungen 1) und 2) je drei Gleichungen ergaben, lassen sich auch aus den soeben gebildeten Gleichungen 9), 10) und 11) je 3 weitere Gleichungen entwickeln, nämlich dadurch, daß man jede derselben nach den darin vorkommenden Größen auflöst.

a) Aus Gleichung 9) folgt:

α) Nach n aufgelöst: $s = \tfrac{1}{2}n(2a + (n - 1)d)$

$$2s = 2an + (n - 1)dn$$

$$2s = 2an + dn^2 - dn$$

$$dn^2 + 2an - dn = 2s$$

$$dn^2 + (2a - d)n = 2s$$

$$n^2 + \frac{2a-d}{d} . n = \frac{2s}{d}$$

$$n^2 + \frac{2a-d}{d} . n + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2 = \frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2$$

$$\left(n + \frac{2a - d}{2d}\right)^2 = \frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2$$

$$n + \frac{2a-d}{2d} = \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$$

$$n = - \frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{(2a - d)^2 + 8ds}{4d^2}}$$

$$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}$$

$$n = \frac{1}{2d}[d - 2a \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}] \quad \text{Gleichung 12)}$$

β) Nach a aufgelöst: $s = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$

$$\frac{2s}{n} = 2a + (n - 1)d$$

$$2a = \frac{2s}{n} - (n - 1)d$$

$$a = \frac{s}{n} - (n - 1)\frac{d}{2} \quad \text{Gleichung 13)}$$

γ) Nach d aufgelöst: $s = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$

$$\frac{2s}{n} = 2a + (n - 1)d$$

$$\frac{2s}{n} - 2a = (n - 1)d$$

$$(n - 1)d = \frac{2s - 2an}{n}$$

$$d = \frac{2(s - an)}{n(n - 1)} \quad \text{. . . Gleichung 14)}$$

b) Aus Gleichung 10) folgt:

α) Nach n aufgelöst: $s = \frac{1}{2}n[2t - (n - 1)d]$

$$2s = 2nt - (n - 1)dn$$

$$2s = 2nt - n^2d + nd$$

$$n^2d - 2nt - nd = - 2s$$

$$n^2d - n(2t + d) = - 2s$$

$$n^2 - \frac{2t + d}{d} \cdot n = - \frac{2s}{d}$$

$$n^2 - \frac{(2t + d)n}{d} + \left(\frac{2t + d}{2d}\right)^2 = \left(\frac{2t + d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}$$

$$\left[n - \frac{d+2t}{2d}\right]^2 = \frac{(d + 2t)^2 - 8ds}{4d^2}$$

$$n - \frac{d+2t}{2d} = \pm \sqrt{\frac{(d + 2t)^2 - 8ds}{4d^2}}$$

$$n = \frac{d + 2t}{2d} \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}$$

$$n = \frac{1}{2d}\left[d + 2t \pm \sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}\right]$$ Gleichung 15)

β) Nach t aufgelöst: $s = \frac{1}{2}n[2t - (n - 1)d]$

$$\frac{2s}{n} = 2t - (n - 1)d$$

$$2t = \frac{2s}{n} + (n - 1)d$$

$$t = \frac{s}{n} + (n - 1)\frac{d}{2}$$ . . Gleichung 16)

γ) Nach d aufgelöst: $s = \frac{1}{2}n[2t - (n - 1)d]$

$$\frac{2s}{n} = 2t - (n - 1)d$$

$$(n - 1)d = 2t - \frac{2s}{n}$$

$$(n - 1)d = \frac{2nt - 2s}{n}$$

$$d = \frac{2(nt - s)}{n(n - 1)}$$ . . . Gleichung 17)

c) Aus Gleichung 11) folgt:

α) Nach t aufgelöst: $s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}$

$$2ds = ad + dt + t^2 - a^2$$

$$t^2 + dt = 2ds + a^2 - ad$$

$$t^2 + dt + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2ds + a^2 - ad + \frac{d^2}{4}$$

$$\left[t + \frac{d}{2}\right]^2 = 2ds + \left[a - \frac{d}{2}\right]^2$$

$$\left[t + \frac{d}{2}\right]^2 = 2ds + \frac{(2a - d)^2}{4}$$

$$t + \frac{d}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{8ds + (2a - d)^2}$$

$$t = \frac{1}{2}\left[-d \pm \sqrt{8ds + (2a - d)^2}\right]$$ . . Gleichung 18)

β) Nach a aufgelöst: $s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}$

$$2ds = ad + dt + t^2 - a^2$$

$$a^2 - ad = dt - 2ds + t^2$$

$$a^2 - ad + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = dt + t^2 + \frac{d^2}{4} - 2ds$$

$$\left[a - \frac{d}{2}\right]^2 = \left[t + \frac{d}{2}\right]^2 - 2ds$$

$$\left[a - \frac{d}{2}\right]^2 = \frac{(2t + d)^2 - 8ds}{4}$$

$$a - \frac{d}{2} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}$$

$$a = \tfrac{1}{2}[d \pm \sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}] \quad \ldots \text{Gleichung 19)}$$

γ) Nach d aufgelöst: $s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}$

$$2ds = ad + dt + t^2 - a^2$$

$$2ds - ad - dt = t^2 - a^2$$

$$d(2s - a - t) = (t + a)(t - a)$$

$$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s - a - t}$$

$$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s - (t + a)} \quad \ldots \text{Gleichung 20)}$$

5) Überblickt man den Inhalt dieses §., so ersieht man, daß inbezug auf die gegebenen und gesuchten Bestimmungsstücke der arithmetischen Progressionen zwanzig Fälle möglich sind, daß sich für jede der fünf Größen a, d, n, t und s vier Gleichungen ergeben und daß von den fünf Größen immer drei bekannt sein müssen, wenn man eine oder zwei derselben berechnen will. Zur bessern Übersicht stellen wir diese 20 Gleichungen in der nachfolgenden Tabelle zusammen und ordnen sie nach den Aufgaben, d. h. den gesuchten Unbekannten.

Formelntafel der arithmetischen Progression.

Gegeben	Gesucht	Formeln	Nr.
a, d, n	s	$s = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$	1
a, d, t	s	$s = \frac{t + a}{2} + \frac{(t + a)(t - a)}{2d}$	2
a, n, t	s	$s = \frac{n}{2}[a + t]$	3
d, n, t	s	$s = \frac{n}{2}[2t - (n - 1)d]$	4
a, d, n	t	$t = a + (n - 1)d$	5
a, d, s	t	$t = \frac{1}{2}[- d \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}]$	6
a, n, s	t	$t = \frac{2s}{n} - a$	7
d, n, s	t	$t = \frac{s}{n} + \frac{(n - 1)d}{2}$	8
a, d, t	n	$n = \frac{t - a}{d} + 1$	9
a, d, s	n	$n = \frac{1}{2d}[d - 2a \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}]$	10
a, t, s	n	$n = \frac{2s}{a + t}$	11
d, t, s	n	$n = \frac{1}{2d}[d + 2t \pm \sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}]$	12
a, n, t	d	$d = \frac{t - a}{n - 1}$	13
a, n, s	d	$d = \frac{2(s - an)}{n(n - 1)}$	14
a, t, s	d	$d = \frac{(t + a)(t - a)}{2s - (t + a)}$	15
n, t, s	d	$d = \frac{2(nt - s)}{n(n - 1)}$	16
d, n, t	a	$a = t - (n - 1)d$	17
d, n, s	a	$a = \frac{s}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$	18
d, t, s	a	$a = \frac{1}{2}[d \pm \sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}]$	19
n, t, s	a	$a = \frac{2s}{n} - t$	20

§. 65. Übungsaufgaben.

1) Von einer arithmetischen Reihe ist gegeben das erste Glied $a = 10$, die Differenz $d = 3$ und die Anzahl der Glieder $n = 21$; wie groß ist: a) das letzte Glied t und b) das summatorische Glied s?

Auflösung. a) Nach Nr. 5 Seite 73 ist:

$t = a + (n - 1)d$

Die geg. W. eing.: $t = 10 + (21 - 1)3$

Oder: $t = 10 + 60$

" $t = 70$

b) Nach Nr. 3 Seite 73 ist:

$s = \frac{1}{2}n[a + t]$

Oder die geg. W. einges.: $s = \frac{1}{2} . 21[10 + 70]$

Oder: $s = \frac{1}{2} . 21 . 80$

Das ist: $s = 840.$

2) Man soll a) das 30. Glied und b) die Summe der 30 ersten Glieder der Reihe 7, 12, 17, 22 . . . bestimmen!

Resultat. a) 152; b) 2385.

3) Wie groß ist: a) das 12. Glied und b) die Summe der 12 ersten Glieder der Reihe 12, $7\frac{1}{2}$, 3 . . .?

Auflösung. a) Es ist hier $a = 12$, $d = -4\frac{1}{2}$ und $n = 12$; also ist nach Seite 66

$t = a - (n - 1)d$

Oder d. geg. W. einges.: $t = 12 - (12 - 1)\frac{9}{2}$

Oder: $t = 12 - 11 . \frac{9}{2}$

Das ist: $t = - 37\frac{1}{2}$

b) Es ist nach Nr. 3 Seite 73

$s = \frac{1}{2} . n(a + t)$

Oder: $s = \frac{1}{2} . 12(12 - 37\frac{1}{2})$

Das ist: $s = - 153.$

4) Es soll t und s bestimmt werden, wenn $a = - 7{,}75$, $d = - \frac{5}{12}$ und $n = 73$ gegeben sind!

Resultat. $t = - 37\frac{3}{4}$; $s = - 1660\frac{3}{4}$.

5) Von einer arithmetischen Reihe ist das erste Glied $\mathbf{a} = 2$, das letzte Glied $t = 32$ und die Summe aller Glieder $\mathbf{s} = 119$. Wie groß ist die Differenz d?

Auflösung. Aus der ersten Fundamentalgleichung: $t = a + (n - 1)d$ ist $n = (t - a) : d + 1$. Setzt man diesen Wert in die zweite Fundamentalgleichung: $s = \frac{1}{2} n (a + t)$ statt n, so ergibt sich:

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{t - a}{d} + 1\right) \cdot (a + t)$$

Nach d aufgelöst: $s = \frac{1}{2} \left(\frac{t - a + d}{d}\right) (a + t)$

Oder $2ds = (t - a + d)(a + t)$

„ $2ds = at - a^2 + ad + t^2 - at + dt$

„ $2ds - ad - dt = t^2 - a^2$

„ $d(2s - a - t) = (t + a)(t - a)$

$$d = \frac{(t + a)(t - a)}{2s - a - t}$$

Die geg. Werte einges.: $d = \frac{(32 + 2)(32 - 2)}{238 - 2 - 32}$

Oder: $d = \frac{34 \cdot 30}{204}$

Mithin: $d = 5.$

6) Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe beträgt 585, das erste Glied derselben ist 4 und die Differenz 5. Wie viel Glieder hat diese Reihe?

Auflösung. Hier ist $a = 4$, $d = 5$ und $s = 585$ gegeben; zu suchen ist n. Eine Gleichung zwischen den vier Größen a, d, s und n ergibt sich durch Substituierung der Größe t aus der Fundamentalgleichung 1) in 2). Nämlich: $t = a + (n - 1)d$; daher $s = \frac{1}{2}n(a + a + (n - 1)d)$ oder $s = \frac{1}{2} n(2a + (n - 1)d)$. In diese Gleichung die gegebenen Werte eingesetzt, kommt:

$$585 = \frac{n}{2}[8 + (n - 1)5]$$

$$585 = 4n + \frac{5n^2}{2} - \frac{5n}{2}$$

$$8n + 5n^2 - 5n = 1170$$

$$5n^2 + 3n = 1170$$

$$n^2 + \tfrac{3}{5} n = 234$$

$$n^2 + \tfrac{3}{5} n + (\tfrac{3}{10})^2 = 234 + \tfrac{9}{100}$$

$$(n + \tfrac{3}{10})^2 = \tfrac{23409}{100}$$

$$n + \tfrac{3}{10} = \pm \tfrac{153}{10}$$

$$n = 15$$

Also hat die gegebene Reihe 15 Glieder.

7) Das Anfangs- und Endglied einer arithmetischen Progression zu finden, wenn die Differenz 9, die Anzahl der Glieder 17 und die Summe der Glieder 1360 ist.

Resultat. $a = 8$; $t = 152$.

8) Zwischen den Zahlen 9 und $17\frac{1}{4}$ sollen 10 Glieder so eingeschaltet (interpoliert) werden, daß diese mit den gegebenen Zahlen eine arithmetische Reihe bilden. Wie heißt diese Reihe?

Auflösung. Von der gesuchten arithmetischen Reihe ist bekannt das Anfangsglied $a = 9$, das Endglied $t = 17\frac{1}{4}$ und, weil 10 Glieder interpoliert werden sollen, auch die Anzahl der Glieder $n = 12$. Setzt man diese Werte in die erste Fundamentalgleichung $t = a + (n - 1)d$ so erhält man:

$$17\frac{1}{4} = 9 + (12 - 1)\,d$$
$$17\frac{1}{4} = 9 + 12d - d$$
$$d = \frac{3}{4}$$

Die Reihe heißt also: $9, 9\frac{3}{4}, 10\frac{1}{2}, 11\frac{1}{4}, 12 \ldots 17\frac{1}{4}$.

9) Die Summe des fünften und zehnten Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 88, die des sechsten und fünfzehnten 124. Wie heißt diese Reihe?

Auflösung. Diese Aufgabe enthält zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und d. Bezeichnet man das gesuchte Anfangsglied a mit x und die gesuchte Differenz d mit y, so ist die allgemeine Form:

	des fünften Gliedes:	$x + 4y$ (Seite 65)
	„ zehnten „	$x + 9y$
	„ sechsten „	$x + 5y$
und	„ fünfzehnten „	$x + 14y$

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$1)\ (x + 4y) + (x + 9y) = 88$$
$$2)\ (x + 5y) + (x + 14y) = 124.$$

Gleich. 1) red. u. geord.:	3) $2x + 13y = 88$
„ 2) „ „ „	4) $2x + 19y = 124$
Gl. 3) von 4) subtr.:	5) $6y = 36$
Mithin	$y = 6$
Und:	6) $2x + 78 = 88$
	$2x = 10$
	$x = 5$

Die gesuchte Reihe ist demnach: 5, 11, 17, 23 . . .

10) Das sechste Glied einer arithmetischen Reihe ist 41, das dreizehnte 90, die Anzahl der Glieder 15. Wie groß ist die Differenz, das Anfangsglied, das Endglied und die Summe aller Glieder?

Resultat. $d = 7; a = 6; t = 104; s = 825$.

11) Das dritte, achte und fünfzehnte Glied einer arithmetischen Reihe betragen zusammen 78, das zweite, sechste, dreizehnte und zwanzigste zusammen 123. Wie heißt das erste Glied und wie die Differenz dieser Progression?

Resultat. $a = 3$, $d = 3$.

12) Wie groß ist die Summe der ersten 1000 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe? Wie groß die Summe der ersten 100 und der ersten 10 Zahlen?

Auflösung. Es soll der Aufgabe gemäß gesucht werden: $s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \, . \, . \, 1000$. Diese Folge von Zahlen stellt, weil die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Zahlen konstant, nämlich $= 1$ ist, eine niedere arithmetische Progression dar. Von derselben kennt man das Anfangsglied $a = 1$, die Differenz $d = 1$, das Endglied $t = 1000$ und die Anzahl der Glieder $n = 1000$. Es ist daher nach Satz 2) Seite 66 $s = \frac{1}{2}n(a + t) = \frac{1}{2} \, . \, 1000 + (1 + 1000) = 500 \, . \, 1001 = 500500$. — Auf ähnliche Weise findet man $s = 1 + 2 + 3 \, . \, . \, . \, 100 = 5050$ und $s = 1 + 2 \, . \, . \, . \, 10 = 55$.

13) Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 1000?

Auflösung. a) Der Aufgabe gemäß soll gesucht werden: $s = 1 + 3 + 5 + 7 \, . \, . \, . \, 1000$. Diese Folge von Zahlen stellt eine arithmetische Reihe dar. Von derselben kennt man $a = 1$, $d = 2$ und t*) $= 999$ (die letzte ungerade Zahl vor 1000 ist nämlich 999). Nach Lehrsatz 2) Seite 66 ist $s = \frac{1}{2} \, n \, (a + t)$. Da hier n unbekannt ist, so bestimmt man den Wert davon aus der Gleichung $t = a + (n - 1)d$. Denselben erhält man so: $t = a + nd - d$, $nd = t - a + d$, $n = (t - a) : d + 1$. Diesen Wert für n in die Gleichung $s = \frac{1}{2} \, . \, n \, (a + t)$ substituiert kommt:

---

*) Gleichung 2) der obigen Formeltafel gibt an, wie man aus diesen 3 Größen die Größe s findet. Sie wird aber hier mit Hilfe der beiden Fundamentalgleichungen selbständig entwickelt.

$$s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t - a}{d} + 1\right) (a + t)$$

$$\text{oder } s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t + a)(t - a)}{2d}$$

Setzt man in diesen Ausdruck die gegebenen Zahlen ein, so erhält man:

$$s = \frac{1 + 999}{2} + \frac{(999 + 1)(999 - 1)}{4}$$

$$s = 500 + \frac{998000}{4}$$

$$s = 500 + 249500$$

$s = 250000$ als die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 1000.

b) Bedenkt man, daß die Anzahl der ungeraden Zahlen von 1 bis 1000 gerade 500 ist, so läßt sich die Aufgabe wie folgt kürzer lösen: $s = \frac{1}{2} . n\ (a + t) = \frac{1}{2} . 500 . (1 + 999) = 250000$

14) Wie groß ist die Summe: a) aller ungeraden Zahlen von 1 bis 219, b) aller geraden Zahlen von 2 bis 1000, c) der n ersten geraden, d) der n ersten ungeraden, e) überhaupt der n ersten Zahlen?

Resultat. a) 12100; b) 250500; c) $n(n + 1)$, Andeutung: Es ist gegeben $a = 2$, $d = 2$ und $n = n$, man bestimme daraus s; d) n^2, Andeutung: Gegeben ist $a = 1$, $d = 2$, $n = n$, man bestimme daraus s; e) $n(n + 1) : 2$.

15) Jemand ersparte sich in einem Jahr 45 ℳ und in jedem folgenden 12 ℳ mehr als in dem vorhergehenden. Wie viel legte er im 30. Jahr zurück und wie viel erübrigte er sich in diesen 30 Jahren?

Auflösung. Da man sich nach der Aufgabe in jedem Jahr 12 ℳ mehr ersparte als in dem nächst vorhergehenden, so bilden die Beträge, die man sich erübrigte, in ihrer Aufeinanderfolge die steigende arithmetische Progression: 45, (45 + 12), (45 + 2 . 12), (45 + 3 . 12), (45 + 4 . 12) . . . In dieser Reihe ist bekannt das Anfangsglied $a = 45$ ℳ, die Differenz $d = 12$ ℳ und die Anzahl der Glieder $n = 30$. Zu suchen ist das Endglied t und das summatorische Glied s. Nach Seite 73 ist $t = a + (n - 1)\, d = 45 + (30 - 1) . 12 = 393$ ℳ und $s = \frac{1}{2}\, n\ (a + t) = \frac{1}{2} . 30\ (45 + 393) = 5070$ ℳ.

16) Jemand läßt einen artesischen Brunnen von 365 **m** Tiefe bohren. Für den ersten Meter werden 2 *M*, für jeden folgenden Meter aber 5 Pfennig mehr als für den nächst vorhergehenden bezahlt. Wie viel hat er a) für den letzten Meter, b) wie viel für den ganzen Brunnen zu zahlen?

Resultat. a) 20,20 *M*; b) 4051,50 *M*.

17) Wie viel Schläge macht eine Uhr in einem Tag (24 Stunden), wenn sie die ganzen Stunden voll und außerdem die Viertelstunden mit bezw. 1, 2, 3 und 4 Schlägen angibt?

Resultat. 396 Schläge.

18) Nach einem Gesetz der Physik durchfällt ein Körper, von dem Widerstande der Luft abgesehen, in der ersten Sekunde 4,905 m, in jeder folgenden Sekunde aber 2 . 4,905 = 9,81 m mehr als in der zunächst vorhergehenden. Welchen Weg durchläuft hiernach ein Körper a) in der achten Sekunde, b) in acht Sekunden?

Auflösung. a) Nach vorstehendem Gesetz durchläuft jeder Körper
in der 1. Sekunde 4,905 m
" " 2. " 4,905 + 9,81 m
" " 3. " 4,905 + 2 . 9,81 m
" " 4. " 4,905 + 3 . 9,81 m u. s. w.

Hiernach bilden die Fallräume in den einzelnen Sekunden eine arithmetische Progression, weil jedes Glied dieser Reihe um die konstante Größe 9,81 größer als das vorhergehende ist. Es ist daher der Fallraum in der 8. Sekunde oder das letzte Glied

$$t = a + (n - 1)\,d$$

Oder $$t = 4{,}905 + (8 - 1)\,.\,9{,}81$$

Das ist: $$t = 73{,}575 \text{ m}.$$

b) Der Weg, den ein Körper in 8 Sekunden durchfällt, bildet das summatorische Glied obiger Reihe und ist daher:

$$s = \tfrac{1}{2}\,n\,(a + t)$$

Oder: $$s = \tfrac{1}{2}\,.\,8\,(4{,}905 + (4{,}905 + 7\,.\,9{,}81))$$

Das ist: $$s = 313{,}92 \text{ m}.$$

Zusatz. Bezeichnet man in vorstehender Gleichung die Zeit allgemein mit t, die Anziehungskraft (Acceleration) der Erde, das ist die Zahl 9,81 mit g, und 4,905 das ist 9,81 : 2 mit g : 2, so erhält man:

$$s = \frac{t}{2}\left[\frac{g}{2} + \left(\frac{g}{2} + (t - 1)g\right)\right]$$

Oder: $$s = \frac{t}{2}\left[\frac{g}{2} + \frac{g}{2} + gt - g\right]$$

$$s = \frac{t}{2}\,[g + gt - g]$$

$$s = \frac{t}{2} \cdot gt$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,gt^2$$

Diese letztere aus der Physik bekannte Gleichung drückt die Beziehung zwischen dem Weg s, der Zeit t und der Acceleration g der Erde eines frei fallenden Körpers aus.

19) In wie viel Sekunden wird ein Körper unter den in der vorigen Aufgabe angegebenen Bedingungen einen Raum von 397,305 m durchlaufen?

Auflösung. Nach der Auflösung der vorigen Aufgabe bilden die Fallräume in den einzelnen Sekunden die arithmetische Progression:
$4{,}905 + (4{,}905 + 9{,}81) + (4{,}905 + 2 \,.\, 9{,}81) + (4{,}905 + 3 \,.\, 9{,}81) \,..$

Von dieser Reihe ist bekannt: das Anfangsglied $a = 4{,}905$ m, die Differenz $d = 9{,}81$ m, die Summe aller Glieder $s = 397{,}305$ m, zu suchen ist die Anzahl der Glieder n, das ist die Anzahl der einzelnen Fallräume, welche der Körper durchläuft, bezw. die Zahl der Sekunden, die der Körper zum Fallen braucht. Formel Nr. 10 Seite 73 gibt die Gleichung an, nach welcher die vorstehende Aufgabe zu lösen ist. Unabhängig von derselben gestaltet sich die Auflösung wie folgt*):

$$1)\quad t = a + (n - 1)\,d$$

Und $$2)\quad s = \tfrac{1}{2}\,n\,(a + t)$$

Den Wert von t aus Gl. 1) für t in Gleichung 2) substituiert, kommt:

$$3)\quad s = \tfrac{1}{2}\,n\,(a + a + (n - 1)d)$$

Oder $$s = \tfrac{1}{2}\,n\,(2a + (n - 1)d)$$

Diese Gleichung nach n aufgelöst, gibt:

$$4)\quad n = \frac{1}{2d}\left[d - 2a \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}\,\right]$$

Setzt man in dieselbe die gegebenen Werte, so wird:

$$n = \frac{1}{2 \,.\, 9{,}81}\left[9{,}81 - 2 \,.\, 4{,}905 \pm \sqrt{(2 \,.\, 4{,}905 - 9{,}81)^2 + 8 \,.\, 9{,}81 \,.\, 367{,}305}\right]$$

Das ist: $n = 9$ als die Anzahl der Sekunden, die der Körper braucht, um eine Strecke von 397,305 m zu durchlaufen.

---

*) Es ist für den Studierenden notwendig, die zu benützenden Gleichungen stets aufs neue selbständig zu entwickeln.

Zusatz. Aus der im Zusatz zur Auflösung der vorigen Aufgabe entwickelten Gleichung $s = \frac{1}{2} gt^2$ folgt

$$t = \sqrt{2s : g}$$

Oder die W. eingesetzt: $t = \sqrt{2 \,.\, 397{,}305 : 9{,}81}$

Das ist: $t = 9$.

20) Wie die Physik lehrt, legt ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper während der ersten Sekunde 4,905 m weniger zurück, als er zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft nicht auf ihn einwirkte, in jeder folgenden Sekunde aber 9,81 m weniger als in der vorhergehenden. a) Wie lange und b) wie hoch wird demnach ein Körper steigen, der mit der anfänglichen Geschwindigkeit von 313,92 m senkrecht in die Höhe geworfen wird und c) nach wie viel Sekunden wird er wieder den Boden erreichen?

Auflösung. Der senkrecht in die Höhe geworfene Körper legt vorstehendem Gesetze zufolge zurück:

in der 1. Sekunde $(313{,}92 - 4{,}905)$ m
„ „ 2. „ $((313{,}92 - 4{,}905) - 9{,}81)$ m
„ „ 3. „ $((313{,}92 - 4{,}905) - 2 \,.\, 9{,}81)$ m

und in der letzten oder nten Sekunde: 4,905 m (am Ende der letzten Sekunde muß die Geschwindigkeit des Körpers = 0 sein und während der letzten Sekunde muß er gerade noch den Fallraum von einer Sekunde, nämlich 4,905 m zurücklegen). Vorstehende Zusammenstellung zeigt, daß die Steighöhen des geworfenen Körpers eine arithmetische Progression bilden, weil die Differenz je zweier auf einander folgender Steighöhen eine konstante Größe, nämlich — 9,81 ist. Von derselben kennt man das Anfangsglied $a = (313{,}92 - 4{,}905)$ m, die Differenz $d = -9{,}81$ und das Endglied $t = 4{,}905$ m.

a) Zu suchen ist zunächst die Anzahl n der Glieder, das ist der Steighöhen, bezw. die Anzahl der Sekunden, welche der Körper zum Steigen braucht. Diese findet man mittelst der 1. Fundamentalgleichung: $t = a + (n - 1)d$. Nach n aufgelöst heißt dieselbe $(t - a) : d + 1$. In diese Gleichung die gegebenen Werte eingesetzt kommt:

$$n = \frac{4{,}905 - (313{,}92 - 4{,}905)}{-9{,}81} + 1$$

$$n = \frac{4{,}905 - 313{,}92 + 4{,}905}{-9{,}81} + 1$$

$$n = \frac{9{,}81 - 313{,}92}{-9{,}81} + \frac{-9{,}81}{-9{,}81}$$

$$n = \frac{9,81 - 313,92 - 9,81}{-9,81}$$

$$n = \frac{-313,92}{-9,81}$$

$$n = \frac{313,92}{9,81}$$

$n =$ 32 als die Sekundenzahl, die der Körper steigt.

Zusatz. Setzt man in dieser Gleichung die Anzahl n der Sekunden $= t_1$, die anfängliche Geschwindigkeit $= a$ und die Beschleunigung $9,81 = g$, so erhält man die Formel

$$t_1 = a : g$$

Diese aus der Physik bekannte Gleichung drückt die Beziehung zwischen der Zeit t, der Anfangsgeschwindigkeit a und der Beschleunigung g der Erde eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers aus.

b) Um zu finden, wie hoch der Körper steigt, muß man die einzelnen Steighöhen der obigen arithmetischen Reihe addieren, das heißt das summatorische Glied s derselben bestimmen. Hiezu kann man die Formel Nr. 1 Seite 73 benützen. In diese die bekannten Werte eingesetzt, erhält man:

$$s = \frac{32}{2} [2 . (313,92 - 4,905) + (32 - 1) . - 9,81]$$

$$s = \frac{32}{2} [627,84 - 9,81 - 313,92 + 9,81]$$

$$s = \frac{32}{2} [627,84 - 313,92]$$

$$s = 16 . 313,92$$

$s = 5022,72$ m als Steighöhe des Körpers.

Zusatz. Setzt man in dieser Gleichung für $n = 32$ die Größe t_1, für das Anfangsglied $a = 313,92 - 4,905$ den Ausdruck $(a - g : 2)$ und für $d = - 9,81$ den Buchstaben $- g$, so erhält man:

$$s = \frac{t_1}{2} \left[2 (a - \frac{g}{2}) + (t_1 - 1) . - g \right]$$

Oder:
$$s = \frac{t_1}{2} [2a - g - gt_1 + g]$$

$$s = \frac{t}{2} [2a - gt]$$

$$s = at_1 - \tfrac{1}{2} gt_1{}^2.$$

Diese letztere aus der Physik bekannte Formel drückt die Beziehung zwischen dem Weg s, der Zeit t_1 und der Beschleunigung g eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers aus.

c) Zur Bestimmung der Anzahl der Sekunden, nach welchen der Körper wieder am Boden anlangt, hat man (vergl. Auflösung zu Aufgabe 18) die arithmetische Progression:
$4{,}905 + (4{,}905 + 9{,}81) + (4{,}905 + 2 \,.\, 9{,}81) + (4{,}905 + 3 \,.\, 9{,}81) \ldots$ Von dieser kennt man: das Anfangsglied $a = 4{,}905$, die Differenz $d = 9{,}81$ und die Summe aller Glieder $s = 5022{,}72$ m; zu suchen ist die Gliederanzahl n der Reihe, d. i. die Anzahl der Sekunden, die der Körper zum Fallen braucht. Diese findet man mit Hilfe der Formel Nr. 10 Seite 73, schneller jedoch mittelst der Seite 81 entwickelten Gleichung $t = \sqrt{2s : g}$. Die gegebenen Werte eingesetzt ergibt sich:

$$t = \sqrt{2 \,.\, 5022{,}72 : 9{,}81}$$

Oder: $t = \sqrt{1024}$

Das ist: $t = 32.$

Daraus folgt, daß der Körper auch 32 Sekunden braucht, um von dem höchsten Punkt, den er beim Steigen erreicht, wieder am Boden anzulangen, und daß daher bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper die Zeit des Steigens der des Fallens gleich ist.

Zusatz. Letzteres läßt sich allgemein auch so zeigen. Es ist:

1) $t = \sqrt{2s : g}$ (Seite 81)

2) $t_1 = a : g$ (S. 82)

3) $s = at_1 - \frac{1}{2} gt_1^2$ (S. 82)

Durch Elimination von a aus der letzteren Gleichung erhält man:

$$s = gt_1 \,.\, t_1 - \frac{1}{2} gt_1^2$$

Oder: $s = g \,.\, t_1^2 - \frac{gt_1^2}{2}$

„ $s = \frac{g \,.\, t_1^2}{2}$

Und daraus: 4) $t_1 = \sqrt{2s : g}$

Aus den Gleichungen 1) und 4) folgt also allgemein, daß die Zeiten t_1 und t des Steigens und Fallens einander gleich sind.

21) Man läßt einen Körper von einer Höhe herabfallen; zu gleicher Zeit wird ein anderer Körper von einem 780 m vertikal darunter liegenden Punkte senkrecht in die Höhe geschossen. Nach wie viel Sekunden werden beide Körper zusammentreffen, wenn die anfängliche Geschindigkeit des letzteren 312 m beträgt?

Resultat. $2\frac{1}{2}$ Sekunden. Andeutung. Die gleichen Zeiten, welche die Körper bis zu ihrer Begegnung brauchen, mit x Sekunden

6*

bezeichnet, läßt sich folgende Gleichung entwickeln: $\frac{1}{2}$ x[2 . 4,905 + (x — 1) 9,81] + $\frac{1}{2}$ x[2 . (312 — 4,905) + (x — 1) . 9,81] = 780. Schneller jedoch kommt man auf folgende Weise zum Ziel: s und s_1 seien die beiden Wege, welche die Körper bis zu ihrer Begegnung zurücklegen; nun ist

$$1)\ s = 4{,}905\ t^2$$

$$2)\ s_1 = 312\ t - 4{,}905\ t^2$$

$$3)\ s + s_1 = 780$$ u. s. w.

22) Zwei Personen, A und B, welche 126 Meilen von einander entfernt sind, brechen gleichzeitig auf, um einander entgegen zu reisen. A legt am ersten Tage 2½ Meilen, an jedem folgenden Tage aber ½ Meile mehr als an dem vorhergehenden zurück; B dagegen macht am ersten Tage 15 Meilen, am zweiten 14, am dritten 13 u. s. w. Wann werden A und B zusammentreffen?

Resultat. Nach 8 Tagen.

23) Jemand hat sich ein Vermögen von 13875 ℳ in der Weise erspart, daß er vor einer gewissen Reihe von Jahren 100 ℳ zurücklegte und in jedem folgenden Jahr 25 ℳ mehr als im vorhergehenden. Vor wie viel Jahren war dies der Fall?

Resultat. Vor 30 Jahren.

24) Ein artesischer Brunnen kostete 3951 ℳ und zwar wurden für den ersten Meter 2 Mark und jeden folgenden 5 Pfennig mehr als für den vorhergehenden bezahlt. Wie tief ist dieser Brunnen?

Resultat. 360 m.

25) Unter eine gewisse Anzahl Kinder wurden 141 ℳ so verteilt, daß das älteste eine bestimmte Summe, das nächst jüngere 1,50 ℳ weniger u. s. w. und das jüngste 3,50 ℳ erhielt. Wie viel Kinder waren es und wie viel erhielt das älteste?

Resultat. 12 Kinder. 20 ℳ. Andeutung. Bezeichnet man das zu suchende Anfangsglied a mit x und die zu suchende Anzahl der Glieder n mit y, so hat man: 1) x + (y — 1) . — 1½ = 3½, und 2) ½ y (x + 3½) = 141, oder man benützt Formel 19 S. 73.

26) Unter 24 Soldaten, die sich bei der Bestürmung einer Festung besonders ausgezeichnet hatten, wurden 8220 ℳ so verteilt, daß jeder nachfolgende 25 ℳ weniger erhielt, als der nächst vorhergehende. Wie viel erhielt der erste und wie viel der letzte?

Resultat. 630 ℳ; 55 ℳ.

27) Ein Schiff mit 175 Passagieren hatte hinreichendes Wasser für die Reise. Nach 30 Tagen wurden infolge des Skorbuts täglich 3 Mann hinweggerafft. Ein Sturm verzögerte die Fahrt um drei Wochen. Das Schiff erreichte den Hafen, ohne daß das Wasser ausgegangen war. Wie lange dauerte die Fahrt? (Aufgabe von Heis).

Auflösung. Angenommen, die ganze Fahrt, die 3 Wochen = 21 Tage Verzögerung eingeschlossen, habe x Tage gedauert. Da für 175 Passagiere ursprünglich das Wasserquantum auf x — 21 Tage vorgesehen war, so betrug die tägliche Portion für jeden Passagier 1 : (175 (x — 21)), und zwar während der ganzen Dauer der Fahrt. In den 30 ersten Tagen verbrauchten somit 175 Passagiere $\frac{1}{175(x-21)} \cdot 175 \cdot 30 = \frac{30}{x-21}$ des ganzen Vorrats, somit betrug der Rest:

$1 - \frac{30}{x-21} = \frac{x-21-30}{x-21} = \frac{x-51}{x-21}$. Vom Beginn des Skorbuts an wurden verbraucht:

am ersten Tage: $\frac{172}{175(x-21)}$ des Wassers

„ zweiten „ $\frac{172}{175(x-21)} - \frac{3}{175(x-21)}$

„ dritten „ $\frac{172}{175(x-21)} - 2 \cdot \frac{3}{175(x-21)}$ u. s. w.

Daraus folgt, daß die Wassermengen, welche vom Beginn des Skorbuts an in den Tagen bis zur Einfahrt in den Hafen verbraucht wurden, eine fallende arithmetische Progression bilden. Von derselben kennt man:

das Anfangsglied $a = \frac{172}{175(x-21)}$

die Differenz $d = -\frac{3}{175(x-21)}$

das summatorische Glied $s = \frac{x-51}{x-21}$

die Anzahl der Glieder $n = x - 30$.

Zwischen den Größen a, d, s und n besteht nach Nr. 1 Seite 73 die Relation:

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right]$$

In diese Gleichung die vorstehenden Werte eingesetzt, erhält man:

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2} \cdot \left[2 \cdot \frac{172}{175(x-21)} + (x-30-1) \cdot \frac{3}{175(x-21)}\right]$$

Oder: $$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2}\left[\frac{344}{175(x-21)} - \frac{3(x-31)}{175(x-21)}\right]$$

" $$\frac{x-51}{x-21} = \frac{x-30}{2} \cdot \frac{437-3x}{175(x-21)}$$

$$\frac{x-51}{x-21} = \frac{(x-30)(437-3x)}{350(x-21)}$$

$$350(x-51) = (x-30)(437-3x)$$

$$350x - 17850 = 437x - 3x^2 - 13110 + 90x$$

$$3x^2 - 177x = 4740$$

$$x^2 - 59x = 1580$$

$$x^2 - 59x + (\tfrac{59}{2})^2 = 1580 + \tfrac{3481}{4}$$

$$(x - \tfrac{59}{2})^2 = \tfrac{9801}{4}.$$

$$x - \tfrac{59}{2} = \pm \tfrac{99}{2}$$

$$x = \tfrac{59}{2} \pm \tfrac{99}{2}$$

$$x_1 = \tfrac{158}{2} = 79$$

$$x_2 = -\tfrac{40}{2} = -20$$

Die ganze Fahrt des Schiffes dauerte somit 79 Tage. Der zweite Wurzelwert hat für diese Aufgabe keinen Sinn.

28) Die Ziffern einer vierzifferigen Zahl bilden in der Ordnung von der Ziffer der Tausender gegen die der Einer eine steigende arithmetische Progression. Dividiert man mit der Summe dieser Ziffern in die Zahl selbst, so erhält man als Quotient $84\frac{13}{16}$; schreibt man die Ziffern in umgekehrter Ordnung, so entsteht eine Zahl, welche um 6174 größer ist als die zu suchende. Welches ist diese Zahl?

Resultat. 1357. Andeutung. Die Ziffer der Tausender sei x, dann ist, wenn man die Differenz d mit y bezeichnet, die Ziffer der Hunderter $x + y$, der Zehner $x + 2y$ und der Einer $x + 3y$; die Summe dieser Ziffern ist also $4x + 6y$. Die zu suchende Zahl ist $1000 \cdot x + 100(x + y) + 10(x + 2y) + (x + 3y)$ und die

mit denselben Ziffern in umgekehrter Ordnung geschriebene Zahl: $1000(x + 3y) + 100(x + 2y) + 10(x + y) + x$. Nun lassen sich leicht zwei Gleichungen bilden u. s. w.

29) Die Ziffern einer dreizifferigen Zahl bilden in der Richtung von links nach rechts eine fallende arithmetische Progression, deren Summe in der Zahl selbst $56\frac{4}{5}$ mal enthalten ist; die mit denselben Ziffern in umgekehrter Ordnung geschriebene Zahl ist um 594 kleiner als die zu suchende. Wie heißt diese Zahl?

Resultat. 852.

30) Die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression. Wie groß sind die Seiten desselben, wenn sein Flächeninhalt 384 qm beträgt?

Resultat. 24 m, 32 m, 40 m.

Drittes Kapitel.

Die geometrischen Progressionen.

§. 66. Erklärungen.

1) Eine geometrische Progression ist eine Folge von Zahlen, von denen jede nachfolgende aus der vorhergehenden dadurch entsteht, daß die vorhergehende mit einer und derselben Zahl multipliciert wird. Die konstante Zahl, womit ein vorhergehendes Glied zu multiplicieren ist, um das folgende zu erhalten, heißt der Exponent, Quotient oder auch Faktor und wird mit dem Buchstaben e (oder q) bezeichnet. Ist der Exponent größer als 1, so heißt die Reihe eine steigende, ist er kleiner als 1, eine fallende. So ist:

a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 . . . eine steigende ($e = 2$),
b) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{243}$, $\frac{1}{729}$ . . . eine fallende geom. Reihe ($e = \frac{1}{3}$).

2) In einer geometrischen Progression kommen fünf Größen inbetracht, nämlich:

das Anfangsglied,	bezeichnet durch	a,
der Exponent,	" "	e,
die Anzahl d. Gl.,	" "	n,
das letzte Glied,	" "	t,
und die Summe aller Gl.	" "	s.

3) Die allgemeine Form einer geometrischen Progression ist:

1. Gl. 2. Gl. 3. Gl. 4. Gl. 5. Gl. 6. Gl.

$a, \quad a \cdot e, \quad a \cdot e^2, \quad a \cdot e^3, \quad a \cdot e^4, \quad a \cdot e^5 \ldots$ In dieser Reihe ist a das erste Glied, e der Exponent und die Ziffern 1, 2, 3 . . . sind die Stellenzeiger. Hiernach kann die geometrische Reihe 1, 2, 4, 8 . . . auch, da hier der Exponent 2 ist, wie folgt geschrieben werden:

$1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^3, 1 \cdot 2^4, 1 \cdot 2^5, 1 \cdot 2^6, 1 \cdot 2^7, 1 \cdot 2^8 \ldots$

4) Wie bei den arithmetischen, so sind auch bei den geometrischen Reihen hauptsächlich zwei Aufgaben zu lösen, nämlich die Bestimmung der Größe irgend eines Gliedes und der Summe aller Glieder. Die Lösung dieser Aufgaben lehrt der folgende §.

§. 67. Die Fundamentalgleichungen der geometrischen Reihen.

1) Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist gleich dem Produkt aus dem ersten Glied und der sovielten Potenz des Quotienten als der Zeiger des nächst vorhergehenden Gliedes Einheiten hat.

Beweis. Derselbe folgt unmittelbar aus dem Bildungsgesetze der Reihe. Aus der allgemeinen Form derselben, nämlich:

1. Gl. 2. Gl. 3. Gl. 4. Gl. 5. Gl. 6. Gl. n tes Gl.

$a, \quad a \cdot e, \quad a \cdot e^2, \quad a \cdot e^3, \quad a \cdot e^4, \quad a \cdot e^5 \ldots \quad a \cdot e^{n-1}$

ersieht man, daß das zweite Glied aus dem Produkt des ersten und der 2—1=1ten Potenz von e, das dritte Glied aus dem Produkt des ersten und der 3—1=2ten Potenz von e, mithin das n te Glied aus dem Produkt des ersten und der (n — 1)ten Potenz von e besteht. Das n te oder allgemeine Glied heißt demnach: $a \cdot e^{n-1}$ Bezeichnet nun t das nte oder letzte Glied der Reihe, so ist: $t = a \cdot e^{n-1}$ als die erste Fundamentalgleichung der geometrischen Reihe. — Das Gesagte veranschauliche man sich auch noch auf folgende Weise:

1. Gl. 2. Gl. 3. Gl. 4. Gl. 5. Gl. 6. Gl. 7. Gl. 8. Gl.

$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64, \quad 128 \ldots$ oder

$1, \quad 1 \cdot 2^1, \quad 1 \cdot 2^2, \quad 1 \cdot 2^3, \quad 1 \cdot 2^4, \quad 1 \cdot 2^5, \quad 1 \cdot 2^6, \quad 1 \cdot 2^7 \ldots$

Aus dem allgemeinen, bezw. letzten Gliede t einer geometrischen Reihe kann man jedes Glied derselben berechnen; so ist, wenn für n die Zahl 10 gesetzt wird, das 10te Glied $a \cdot e^{10-1} = a \cdot e^9$. In der obigen bestimmten Progression 1, 2, 4, 8 . . . ist hiernach das sechste Glied $1 \cdot 2^{6-1} = 1 \cdot 2^5$, das zehnte Glied $1 \cdot 2^{10-1} = 1 \cdot 2^9$ u. s. w.

2) Man findet die Summe aller Glieder einer geometrischen Reihe (die Summe der geometrischen Progression) s, indem man das erste Glied von dem Produkte aus dem letzten Gliede und dem Exponenten subtrahiert und die Differenz durch den um 1 verminderten Exponenten dividiert.

Behauptung. $s = (te - a) : (e - 1)$.

Beweis. Beweisen wir die Richtigkeit dieses Satzes zunächst an einem Zahlenbeispiel. Die zu summierende Reihe sei: 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122. Multipliciert man jedes Glied dieser Reihe mit ihrem Exponenten 3, so erhält man die zweite Progression: 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366. Diese zwei Progressionen heißen also:

	1. Gl.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1)	2,	6,	18,	54,	162,	486,	1458,	4374,	13122
2)	6,	18,	54,	162,	486,	1458,	4374,	13122,	39366.

Es ist nun ersichtlich, daß die Summe der Glieder der 2. Reihe das 3fache der Summe der Glieder der ersten Reihe ist, also 3s, wenn diese mit s bezeichnet wird. Subtrahiert man nun sämtliche Glieder der ersten Reihe von denen der zweiten Reihe, so muß der Rest das 2fache der Summe der ersten Reihe sein. Bei dieser Subtraktion hebt aber, wie oben ersichtlich, das zweite Glied der ersten Reihe das erste Glied der zweiten, ebenso das dritte der ersten Reihe das zweite der zweiten u. s. w. auf. Schließlich bleibt nur noch das letzte Glied der zweiten und das erste Glied der ersten Reihe übrig Dieser Rest 39366 — 2 muß nun offenbar die 2fache Summe der Glieder der ersten Reihe sein. Ist aber das 2fache derselben $39366 - 2 = 39364$, so ist das einfache, also die Summe selbst, $39364 : 2 = 19682$. Das Gesagte läßt sich so übersichtlich darstellen:

$$3s - s = 39366 - 2$$

Oder: $$(3 - 1)s = 13122 \,.\, 3 - 2$$

Also: $$s = (13122 \,.\, 3 - 2) : (3 - 1) = 19682.$$

Da dasselbe für jede andere geometrische Reihe erwiesen werden kann, so ist allgemein, wie der Lehrsatz behauptet $s = (te - a) : (e - 1)$. — Allgemein geführt, gestaltet sich der Beweis wie folgt.

$$1)\ s = a + ae + ae^2 + \ldots + t$$

Mit e mult.: $$2)\ es = ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + t + te$$

1) von 2) subtr.: 3) $es - s = te - a$
Oder: $s(e - 1) = te - a$
Mithin: $s = (te - a) : (e - 1)$, w. z. b. w.
Dies ist die zweite Fundamentalgleichung der geometrischen Reihe (das sogenannte summatorische Glied der Reihe).

3) Für den Fall, daß $e < 1$, die Reihe also eine fallende ist, pflegt man den vorstehenden Ausdruck für s in der folgenden Form $s = (a - te) : (1 - e)$ darzustellen. Man erhält dieselbe, wenn man Zähler und Nenner des ersten Ausdrucks mit -1 multipliciert.

4) Eine geometrische Reihe ist eine fallende, wenn der Exponent derselben kleiner als 1 ist. Die späteren Glieder einer solchen müssen also immer kleiner und kleiner werden und für unendlich viele Glieder muß das letzte Glied unendlich klein ausfallen, also gleich 0 werden. Setzen wir daher in obiger Formel $s = (te - a) : (e - 1)$ für $t = 0$, so erhalten wir:

$$s = \frac{0 \,.\, e - a}{e - 1} = \frac{0 - a}{e - 1} = \frac{-a}{e - 1} = \frac{a}{1 - e}$$

Dieser Ausdruck stellt also die Summe einer fallenden unendlichen geometrischen Reihe dar.

§. 68. Die aus den beiden Fundamentalformeln der geometrischen Reihe hervorgehenden Gleichungen.

1) Wie wir im vorigen § gesehen haben, existieren zwischen den fünf, bei einer geometrischen Reihe inbetracht kommenden Größen a, e, n, t und s zwei von einander unabhängige Gleichungen, nämlich:

$t = a \,.\, e^{n-1} \ldots$ Gleichung 1)
$s = (te - a) : (e - 1) \ldots$ Gleichung 2).

Es fragt sich nun, wieviel und welche Gleichungen sich aus diesen beiden Fundamentalformeln entwickeln lassen. Dies wollen wir in folgendem untersuchen.

2) Zunächst ergeben sich unmittelbar aus jeder dieser beiden Gleichungen drei weitere, denn die darin vorkommenden vier Größen hängen so von einander ab, daß aus je dreien derselben die vierte folgt. Man findet diese sechs Gleichungen, indem man Gleichung 1) und 2) nach den darin enthaltenen Größen auflöst. Also:

a) Aus Gleichung 1): $t = a \cdot e^{n-1}$ folgt:

α) Nach a aufgelöst: $a = \frac{t}{e^{n-1}}$ .... Gleichung 3)

β) Nach e aufgelöst: $e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$ .... Gleichung 4)

γ) Nach n aufgelöst: $t = a \cdot e^{n-1}$

$$e^{n-1} = \frac{t}{a}$$

$$(n - 1) \log e = \log t - \log a$$

$$n - 1 = \frac{\log t - \log a}{\log e}$$

$$n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1 \text{ .... Gleichung 5)}$$

Erläuterung. Unter β) ist zunächst $e^{n-1} = t : a$; zieht man nun beiderseits die $(n - 1)$te Wurzel, so erhält man die oben angegebene Gleichung 4). — Wird in der Gleichung $t = a \cdot e^{n-1}$ die Größe n als Unbekannte angesehen, so wird diese Gleichung dadurch eine Exponentialgleichung (pag. 59). Um dieselbe aufzulösen, betrachet man zunächst die ganze Potenz, in welcher die Unbekannte als Exponent vorkommt, als Unbekannte und isoliert sie deshalb. Hiedurch erhält man $e^{n-1} = t : a$. Logarithmiert man jetzt die Gleichung, so wird dadurch die Unbekannte aus dem Exponenten entfernt und in einen Faktor verwandelt. Hiebei sind die Sätze f) Seite 12 und e) Seite 11 zu beachten.

b) Aus Gleichung 2): $s = \frac{te - a}{e - 1}$ folgt:

α) Nach t aufgelöst: $s(e - 1) = te - a$

$$te = s(e - 1) + a$$

$$t = \frac{s(e - 1) + a}{e} \text{ .... Gleichung 6)}$$

β) Nach e aufgelöst: $s(e - 1) = te - a$

$$se - s = te - a$$

$$se - te = s - a$$

$$e(s - t) = s - a$$

$$e = \frac{s - a}{s - t} \text{ .... Gleichung 7)}$$

γ) Nach a aufgelöst: $s(e - 1) = te - a$

$$a = te - s(e - 1) \text{ .... Gleichung 8)}$$

3) Ferner erhält man drei weitere Gleichungen dadurch, daß man nach einander für je eine der in Gleichung 2) vorkommenden Größen t, a und e ihre Werte aus Gleichung 1) substituiert, die genannten Größen also aus 2) eliminiert. Nämlich:

a) Durch Elimination von t. Aus Gleich. 1) ist $t = a \cdot e^{n-1}$. Diesen Wert für t in Gleich. 2) gesetzt, kommt:

$$s = \frac{a \cdot e^{n-1} \cdot e - a}{e - 1}$$

$$s = \frac{a \cdot e^{n} - a}{e - 1}$$

$$s = a \cdot \frac{e^{n} - 1}{e - 1} \quad \ldots \text{ Gleichung 9)}$$

b) Durch Elimination von a. Aus Gl. 1) ist $a = t : e^{n-1}$. Diesen Wert für a in Gleichung 2) substituiert, erhält man:

$$s = \left(te - \frac{t}{e^{n-1}}\right) : (e - 1)$$

$$s = \frac{te \cdot e^{n-1} - t}{e^{n-1}} : (e - 1)$$

$$s = \frac{te^{n} - t}{e^{n-1}} : (e - 1)$$

$$s = \frac{t(e^{n} - 1)}{e^{n-1}(e - 1)} \quad \ldots \text{ Gleichung 10)}$$

c) Durch Elimination von e. Aus Gleichung 1) ist $e = \sqrt[n-1]{t : a}$. Hiefür kann man auch setzen $e = (t : a)^{\frac{1}{n-1}}$, da jede Wurzelgröße als Potenz mit gebrochenem Exponenten geschrieben werden kann. Setzt man nun diesen Ausdruck für e in Gleichung 2) ein, so erhält man:

$$s = \frac{t \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a}{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1} \quad \text{oder } s = \frac{t \cdot \frac{t^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a}{\frac{t^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - 1}$$

$$s = \frac{\dfrac{t \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}}{\dfrac{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}} \text{ oder } s = \frac{t \cdot t^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot a^{\frac{1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$s = \frac{t^{\frac{n-1+1}{n-1}} - a^{\frac{n-1+1}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} \text{ oder } s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} \ldots \text{Gl. } 11)$$

Erläuterung zu c). Bei der Reduktion dieser Gleichung kamen der Reihe nach folgende Lehrsätze zur Anwendung: 1) Ein Quotient wird potenziert, $(t : a)^{\frac{1}{n-1}}$, indem man sowohl den Dividend als den Divisor potenziert, also $t^{\frac{1}{n-1}}$ und $a^{\frac{1}{n-1}}$, und erstere Potenz durch letztere dividiert. 2) Brüche und Ganze werden addiert, indem man die Ganzen mit dem Nenner des Bruches multipliciert, dieses Produkt zu dem Zähler addiert und der erhaltenen Summe den Nenner des Bruches als Nenner gibt. 3) Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl, nämlich mit $a^{\frac{1}{n-1}}$ multipliciert. 4) Gleichbasige Potenzen, nämlich t^1 und $t^{\frac{1}{n-1}}$, werden mit einander multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

4) Gerade so wie sich aus beiden Gleichungen 1) und 2) je drei Gleichungen ergaben, lassen sich auch aus den soeben abgeleiteten Gleichungen 9), 10) und 11) je 3 weitere Gleichungen entwickeln, nämlich dadurch, daß man jede derselben nach den darin vorkommenden Größen auflöst.

a) Aus Gleichung 9) folgt:

α) Nach a aufgelöst: $s = a \cdot \dfrac{e^n - 1}{e - 1}$

$$s(e - 1) = a(e^n - 1)$$

$$a = \frac{s(e - 1)}{e^n - 1} \quad \ldots \text{ Gleichung } 12)$$

β) Nach n aufgelöst: $s = a \cdot \dfrac{e^n - 1}{e - 1}$

$$s(e - 1) = a(e^n - 1)$$

$$s(e - 1) = ae^n - a$$

$$ae^n = s(e - 1) + a$$

$$e^n = \frac{s(e - 1) + a}{a}$$

$$n \cdot \log e = \log[s(e - 1) + a] - \log a$$

$$n = \frac{\log[s(e - 1) + a] - \log a}{\log e} \quad \ldots \text{Gleich. 13)}$$

γ) Nach e aufgelöst. Dieser Fall läßt die Aufstellung einer allgemeinen Gleichung nicht zu, da hier eine unreine Gleichung vom nten Grad vorliegt.

b) Aus Gleichung 10 folgt:

α) Nach t aufgelöst:

$$s = \frac{t(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}$$

$$s \cdot e^{n-1} \cdot (e - 1) = t \cdot (e^n - 1)$$

$$t = \frac{s \cdot e^{n-1}(e - 1)}{e^n - 1} \quad \ldots \text{Gleichung 14)}$$

β) Nach e aufgelöst. In diesem Fall entsteht eine unreine Gleichung vom n ten Grad. Da die Behandlung solcher Gleichungen die Grenzen der Elementarmathematik überschreitet, so muß dieser Fall hier ohne Erledigung bleiben.

γ) Nach n aufgelöst:

$$s = \frac{t(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}$$

$$(e - 1)\, s \cdot e^{n-1} = t(e^n - 1)$$

$$(e - 1)\, se^{n-1} = te^n - t$$

$$te^n - (e - 1)se^{n-1} = t$$

$$tee^{n-1} - (e - 1)se^{n-1} = t$$

$$[te - (e - 1)s]e^{n-1} = t$$

$$e^{n-1} = \frac{t}{te - (e - 1)s}$$

$$(n - 1) \log e = \log t - \log[te - (e - 1)s]$$

$$n - 1 = \frac{\log t - \log[te - (e - 1)s]}{\log e}$$

$$n = \frac{\log t - \log[te - (e - 1)s]}{\log e} + 1 \quad \ldots \text{Gleich. 15)}$$

c) Aus Gleichung 11 folgt:

α) Nach t aufgelöst. Dieser Fall führt auf eine unreine Gleichung vom n ten Grade, muß daher hier ohne Erledigung bleiben.

β) Nach a aufgelöst. Dasselbe ist auch hier der Fall.

γ) Nach n aufgelöst. Die zu suchende Gleichung, worin n als unbekannt, a, t und s als bekannt oder gegeben zu betrachten sind, findet man bequem auf folgende Weise. Nach Gleichung 7) ist e = (s — a) : (s — t). Setzt man diesen Wert in Gleichung 1) für e ein, so erhält man:

$$t = a \cdot \left[\frac{s - a}{s - t}\right]^{n - 1} \quad \text{oder:}$$

$$\left[\frac{s - a}{s - t}\right]^{n - 1} = \frac{t}{a}$$

$$(n - 1)[\log (s - a) - \log(s - t)] = \log t - \log a$$

$$n - 1 = \frac{\log t - \log a}{\log(s - a) - \log(s - t)}$$

$$n = \frac{\log t - \log a}{\log(s - a) - \log(s - t)} + 1 \ldots \text{Gleich. 16).}$$

4) Überblickt man den Inhalt dieses §., so ersieht man, daß inbezug auf ein gesuchtes und drei gegebene Bestimmungsstücke einer geometrischen Reihe 20 Gleichungen sich aufstellen lassen. Darunter sind aber vier unreine Gleichungen vom nten Grad, deren Behandlung in das Gebiet der höheren Mathematik gehört. Die anderen 16 Gleichungen sind nach den bisher entwickelten Methoden lösbar; vier davon sind logarithmisch, die übrigen sind einfache oder höhere reine Gleichungen. Die nachstehende Tabelle enthält diese verschiedenen Gleichungen, nach den Aufgaben, d. h. den gesuchten Unbekannten geordnet.

Formeltafel der geometrischen Progression.

Gegeben	Gesucht	Formeln	Nr.
a, e, n		$s = \frac{a(e_n - 1)}{e - 1}$	1
a, e, t	s	$s = \frac{et - a}{e - 1}$	2
a, n, t		$s = [t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}] : [t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}]$	3
e, n, t		$s = \frac{t(e^n - 1)}{e^{n-1} . (e - 1)}$	4
a, e, n		$t = a . e^{n-1}$	5
a, e, s		$t = \frac{a + (e - 1)s}{e}$	6
a, n, s	t	$t = ?$	7
e, n, s		$t = \frac{s . e^{n-1}(e - 1)}{e^n - 1}$	8
a, e, t		$n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1$	9
a, e, s		$n = \frac{\log[a + (e - 1)s] - \log a}{\log e}$	10
a, t, s	n	$n = \frac{\log t - \log a}{\log(s - a) - \log(s - t)} + 1$	11
e, t, s		$n = \frac{\log t - \log[et - (e - 1)s]}{\log e} + 1$	12
a, n, t		$e = \sqrt[n-1]{t : a}$	13
a, n, s	e	$e = ?$	14
a, t, s		$e = \frac{s - a}{s - t}$	15
n, t, s		$e = ?$	16
e, n, t		$a = t : e^{n-1}$	17
e, n, s	a	$a = \frac{s(e - 1)}{e^n - 1}$	18
e, t, s		$a = et - s(e - 1)$	19
n, t, s		$a = ?$	20

§. 69. Übungsaufgaben.

1) Das Anfangsglied einer geometrischen Progression ist 1, der Exponent 2 und die Anzahl der Glieder 13. Wie groß ist das letzte Glied und wie groß die Summe der Glieder?

Auflösung. Der Aufgabe gemäß ist von einer geometrischen Reihe gegeben: $a = 1$, $e = 2$ und $n = 13$; gesucht soll werden t und s. Nach Lehrsatz ist $t = a \,.\, e^{n-1}$. Daher erhält man, wenn man in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte einsetzt: $t = 1 \,.\, 2^{13-1} = 1 \,.\, 2^{12} = 4096$. — Für die Auflösung der zweiten Aufgabe hat man nach Lehrsatz: $s = (et - a) : (e - 1)$, oder die Werte eingesetzt: $s = (2 \,.\, 4096 - 1) : (2 - 1) = 8191$.

2) In einer geometrischen Progression ist das erste Glied $a = 11 (3\frac{1}{5})$ und der Exponent $e = 1\frac{1}{2}$ (0,20); wie groß ist das nte = 5 (6) Glied und die Summe der $n = 5$ (6) ersten Glieder?

Resultat. $t = 55\frac{11}{16}(\frac{16}{15625})$; $s = 145\frac{1}{16}(3\frac{15621}{15625})$.

3) Wie groß ist das 11. Glied und die Summe der 11 ersten Glieder der Progression 5, 15, 45, 135 ....?

Auflösung. Die Zahlenreihe 5, 15, 45 ... bildet eine geometrische Progression, weil der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder eine konstante Größe, nämlich = 3 ist. Von dieser Reihe kennt man das Anfangsglied $a = 5$, den Quotienten $e = 3$ und die Anzahl der Glieder $n = 11$; zu suchen ist: a) das Endglied t und b) das summatorische Glied s.

a) Nach Formel Nr. 5 Seite 96 ist:

$$t = a \,.\, e^{n-1}$$

Oder, die W. einges.: $t = 5 \,.\, 3^{10}$

$$\log t = \log 5 + 10 \log 3$$

$$\log t = \begin{cases} 0{,}6989700 \\ 4{,}7712130 \end{cases}$$

$$\log t = 5{,}4701830$$

$$\text{num} \log 5{,}4701830 = 29524 + 5 = 295245$$

$$\begin{array}{r} -\ 1752 \\ \hline 78 \end{array}$$

Mithin $t = 295245$.

b) Nach Formel Nr. 2 Seite 96 ist:

$$s = \frac{et - a}{e - 1}$$

Oder: $$s = \frac{295245 \,.\, 3 - 5}{3 - 1}$$

$$s = 442865.$$

4) Das 11. Glied einer geometrischen Reihe, deren Quotient 3 ist, beträgt 118098; wie groß ist das erste Glied und die Summe der 11 ersten Glieder?

Resultat. 2; 177146.

5) In einer geometrischen Reihe ist das erste Glied a = 3 und das nte=8te Glied t = 234375; wie groß ist der Quotient e dieser Reihe?

Auflösung. Nach Formel Nr. 5 Seite 96 ist:

$$t = a \,.\, e^{n-1}$$

Hieraus ist: $$e = \sqrt[n-1]{t : a}$$

D. Werte subst.: $$e = \sqrt[8-1]{234375 : 3}$$

Oder: $$e = \sqrt[7]{78125}$$

$$\log e = \tfrac{1}{7} \log 78125$$

$$\log e = 4{,}8927900 \,.\, \tfrac{1}{7}$$

$$\log e = 0{,}6989700$$

$$\text{num} \log 0{,}6989700 = 5$$

Mithin $$e = 5.$$

6) Die Summe der 8 ersten Glieder einer geometrischen Reihe, deren Quotient 2 ist, beträgt 1785; wie groß ist das erste und letzte Glied dieser Reihe?

Resultat. 7; 896.

7) In einer geometrischen Reihe ist das erste Glied 9, das letzte Glied 19683 und der Quotient 3; wie groß ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Resultat. 8.

8) In einer geometrischen Progression ist das erste Glied 4, das letzte 26244 und die Summe aller Glieder 39364; wie groß ist der Quotient und die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

Resultat. 3; 9.

9) Das 4. und 5. Glied einer geometrischen Progression betragen zusammen 72 und subtrahiert man das 6. vom 4. Glied, so erhält man — 72; welches ist diese Reihe?

Auflösung. Die allgemeine Form der geometrischen Reihe ist:

1	2	3	4	5	6
a	ae	ae^2	ae^3	ae^4	ae^5

Hiernach hat man der Aufgabe gemäß:

$$1)\ ae^3 + ae^4 = 72$$

$$2)\ ae^3 - ae^5 = -72$$

Gl. 2) — Gl. 1): $3)\ ae^4 + ae^5 = 144$

Oder: $e(ae^3 + ae^4) = 144$

„ : $e = 144 : (ae^3 + ae^4)$

Es ist aber nach Gl. 1) $ae^3 + ae^4 = 72$

Folglich: $e = 144 : 72 = 2$

Den Wert von e in Gleichung 1) substituiert, erhält man:

$$a(2^3 + 2^4) = 72$$

$$a \,.\, 24 = 72$$

$$a = 3$$

Die gesuchte Progression ist demnach:

3, 6, 12, 24, 48, 96 . . . .

10) In einer geometrischen Progression ist der Quotient 2mal so groß als das erste Glied und das Produkt aus dem 4. und 5. Glied beträgt 65536. Welches ist diese Reihe?

Resultat. 2, 8, 32, 128, 512 . . . Andeutung. Die allgemeine Form der geometrischen Progression ist: a, ae, ae^2, ae^3, ae^4. Ist nun das erste Glied x, so ist der Quotient 2x; daher erhält man folgende Form der Reihe $x, 2x^2, 4x^3$ . . . . u. s. w.

11) Vier Zahlen bilden eine geometrische Progression; die Summe der beiden ersten beträgt 780 und die der beiden letzten 3120; welches sind diese 4 Zahlen?

Auflösung. Die erste Zahl sei x und der Quotient der geometrischen Reihe, welche die zu suchenden 4 Zahlen bilden, y; alsdann ist die erste Zahl: x, die zweite: xy, die dritte: xy^2 und die vierte xy^3. Der Aufgabe gemäß ist nun:

$$1)\ x + xy = 780$$

$$2)\ xy^2 + xy^3 = 3120$$

Gl. 2) ist: $3)\ y^2(x + xy) = 3120$

Gl. 3) div. durch 1): 4) $y^2 = 4$

Mithin: $y = \pm 2$ als der zu suchende Quotient.

Und: 5) $x + 2x = 780$

Oder: $3x = 780$

Also: $x = 260$ als die zu suchende erste Zahl.

Die 4 Zahlen sind also: 260, 520, 1040, 2080.

12) Vier Zahlen bilden eine geometrische Progression. Multipliciert man die drei ersten mit einander, so erhält man 1728; dagegen ist das Produkt der drei letzten 110592. Welches sind diese vier Zahlen?

Resultat. 3, 12, 48, 192.

13) Die Summe der geraden Glieder einer sechsgliederigen geometrischen Progression beträgt 9765 und die der ungeraden 1953. Man bestimme diese Reihe!

Resultat. 3, 15, 75, 375, 1875, 9375.

14) Zwischen den Zahlen 1 und 4 sollen 10 Zahlen so interpoliert werden, daß eine geometrische Progression entsteht. Wie heißt diese Reihe?

Auflösung. Man kann die zu suchende Reihe bilden, wenn man deren Quotient kennt; diesen muß man daher zunächst ermitteln. Von der aufzustellenden geometrischen Progression kennt man: das Anfangsglied $a = 1$, das Endglied $t = 4$ und die Zahl der Glieder $n = 12$ (10 Glieder sollen interpoliert werden und 2 sind gegeben). Zur Auffindung des Quotienten e benützt man die Formel:

$$t = a \,.\, e^{n-1}$$

Substituiert man in dieselbe die Werte für t, a und n, so erhält man:

$$4 = 1 \,.\, e^{12-1}$$

Oder: $4 = 1 \,.\, e^{11}$

" : $4 = e^{11}$

" : $e^{11} = 4$

" : $e = \sqrt[11]{4}$

" : $\log e = \frac{1}{11} \,.\, \log 4 = \frac{1}{11} \,.\, 0{,}6020600 = 0{,}0547327$

Mithin: $e = 1{,}1343 \ldots.$

Die gesuchte geometrische Reihe ist also:

$1, \sqrt[11]{4}, (\sqrt[11]{4})^2, (\sqrt[11]{4})^3, (\sqrt[11]{4})^4, (\sqrt[11]{4})^5, (\sqrt[11]{4})^6, (\sqrt[11]{4})^7, (\sqrt[11]{4})^8,$
$(\sqrt[11]{4})^9, (\sqrt[11]{4})^{10}, (\sqrt[11]{4})^{11}$, oder $1, \sqrt[11]{4}, \sqrt[11]{4^2} \ldots 4$.

15) Zwischen den Zahlen 2 und 6 sollen 3 Zahlen so interpoliert werden, daß eine geometrische Progression entsteht. Wie heißt der Quotient dieser zu suchenden Reihe?

Resultat. $\sqrt[4]{3}$.

16) Es soll der reinperiodische Dezimalbruch 0,444444 . . . durch Anwendung der geometrischen Reihen in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Auflösung. Den gegebenen rein periodischen Dezimalbruch 0,444 . . . kann man in folgende Summanden zerlegen: 0 Ganze, 4 Zehntel, 4 Hundertel, 4 Tausendtel u. s. w. Man kann also schreiben:

$$0{,}4444 \ldots = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 \ldots \text{ oder}$$

$$0{,}4444 \ldots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} \ldots \text{ oder}$$

$$0{,}4444 \ldots = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} \ldots$$

Die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung bilden, wie leicht ersichtlich ist, eine fallende, unendliche geometrische Progression (die Reihe ist eine geometrische, weil der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder eine konstante Größe, nämlich $\frac{1}{10}$ ist; sie ist fallend, weil dieser Quotient einen echten Bruch bildet, und sie ist unendlich, weil der gegebene Dezimalbruch unzählig viele Dezimalstellen hat). Von dieser Reihe kennt man: das Anfangsglied $a = \frac{4}{10}$, den Quotient $e = \frac{1}{10}$, die Anzahl der Glieder $n =$ unendlich; zu suchen ist das summatorische Glied s. Nach Seite 90 ist:

$$s = \frac{a}{1 - e}$$

$$\text{Oder: } s = \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{9}.$$

17) Mittelst Anwendung der geometrischen Reihen soll man den reinperiodischen Dezimalbruch 0,756756 . . . . in einen gemeinen Bruch verwandeln.

Auflösung. Analog der Auflösung zur vorigen Aufgabe kann man setzen:

$$0{,}756756\ldots = 0{,}756 + 0{,}000756\ldots \text{ oder}$$

$$0{,}756756\ldots = \frac{756}{1000} + \frac{756}{1000000}\ldots \text{ oder}$$

$$0{,}756756\ldots = \frac{756}{1000} + \frac{756}{1000^2}\ldots$$

Auch hier hat man eine fallende unendliche geometrische Reihe. Es ist daher:

$$s = \frac{\frac{756}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{756}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{756}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{756}{999} = \frac{84}{111} = \frac{28}{37}.$$

18) Nach Art der Auflösungen zu den Aufgaben 16) und 17) verwandle man folgende Dezimalbrüche in gemeine Brüche: a) 0,222 . .; b) 0,888 . .; c) 0,0101 . .; d) 0,2727 . .; e) 0,027027 . .; f) 0,378378 . . .!

Resultate. a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{8}{9}$; c) $\frac{1}{99}$; d) $\frac{3}{11}$; e) $\frac{3}{111}$; f) $\frac{14}{37}$.

19) Man soll den unreinperiodischen Dezimalbruch 0,91666 durch Anwendung der geometrischen Reihen in einen gemeinen Bruch verwandeln!

Auflösung. Analog der Auflösung zu den vorhergehenden Aufgaben kann man setzen:

$$0{,}91666\ldots = 0{,}91 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006\ldots \text{ oder}$$

$$0{,}91666\ldots = \frac{91}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{100000}\ldots \text{ oder}$$

$$0{,}91666\ldots = \frac{91}{100} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^3 \cdot 10} + \frac{6}{10^3 \cdot 10^2}.$$

Betrachtet man die Glieder auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, so ergibt sich, daß dieselben, und zwar vom zweiten an, eine fallende unendliche geometrische Reihe bilden. Von derselben kennt man das Anfangsglied $a = 6 : 10^3$, den Quotienten $e = 1 : 10$ und die Anzahl der Glieder n (unendlich); zu suchen ist zunächst das summatorische Glied s dieser Reihe. Es ist daher mit Benützung der Formel $s = a : (1 - e)$:

$$s = \frac{\frac{6}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10^3}}{\frac{9}{10}} = \frac{6 \cdot 10}{10^3 \cdot 9} = \frac{6}{10^2 \cdot 9} = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}.$$

Der gemeine Bruch für den gegebenen unreinperiodischen Dezimalbruch 0,91666 . . . ist somit:

$$\frac{91}{100} + \frac{1}{150} = \frac{273}{300} + \frac{2}{300} = \frac{275}{300} = \frac{11}{12}.$$

20) Es sollen folgende Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt werden: a) 0,3111 . .; b) 0,2423423 . . . c) 0,728787 . . .!

Resultat. a) $\frac{14}{45}$; b) $\frac{269}{1110}$; c) $\frac{481}{660}$.

21) Der Erfinder des Schachbrettes verlangte, als ihm für seine Erfindung eine Belohnung angeboten wurde, so viele Weizenkörner, als man zusammen erhält, wenn für das erste Feld des Schachbrettes 1 Korn, für das zweite 2, für das dritte 4 und so fort für jedes der 64 Felder doppelt so viel Körner als für das vorhergehende gerechnet werden. Wie viel Körner verlangte er?

Auflösung. Die Anzahl der Weizenkörner, die sich der Erfinder für jedes Feld des Schachbrettes erbat, bilden in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Progression:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8\ \ldots\ .$$

Von dieser Reihe ist bekannt: das Anfangsglied $a = 1$, der Quotient $e = 2$ und die Anzahl der Glieder $n = 64$; zu suchen ist das summatorische Glied s. Mit Benützung der Formel Nr. 1 Seite 96 erhält man:

$$s = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1}.$$

Oder: $$s = 2^{64} - 1$$

Berechnet man 2^{64} durch fortgesetzte Multiplikation, so erhält man:

$s = 18446744073709551615$ als die Anzahl der verlangten Weizenkörner.

22) Ein Gerücht geht von einer Person aus und wird innerhalb 12 Stunden von jedem Mitwissenden jede Stunde nur einer andern vertraulich mitgeteilt. Unter wie viel Menschen wird dasselbe in dieser Zeit verbreitet sein?

Resultat. Unter 4095 Menschen.

23) Jemand setzt bei einem Hazardspiele 18 *M* und verliert; darauf verdoppelt er seinen Einsatz und verliert wieder; nun nimmt er sich vor, seinen Einsatz bei jedem Verluste zu verdoppeln. Wie

oft kann er bei andauerndem Verluste setzen, wenn seine Barschaft 9198 ℳ beträgt?

Auflösung. Die andauernden Verluste des Spielers bilden in ihrer Aufeinanderfolge die geometrische Progression:

$$18, \quad 2 . 18, \quad 2^2 . 18, \quad 2^3 . 18 \text{ u. s. w.}$$

Von dieser Reihe kennt man das Anfangsglied $a = 18$, den Quotienten $e = 2$ und das summatorische Glied $s = 9198$; zu suchen ist die Anzahl der Glieder n. Dieselbe kann mittelst der Formel Nr. 10 Seite 96 gefunden werden. Um dieselbe aufs neue selbständig zu entwickeln, verfahren wir also: Es ist:

$$1)\ t = a . e^{n-1}$$

Und:

$$2)\ s = (te - a) : (e - 1)$$

Also:

$$3)\ s = \frac{ae^{n-1} . e - a}{e - 1}$$

Oder:

$$s = \frac{ae^n - 1}{e - 1}$$

"

$$s = \frac{a . (e^n - 1)}{e - 1}$$

Nach n aufgelöst:

$$s(e - 1) = a . (e^n - 1)$$

$$s(e - 1) = ae^n - a$$

$$ae^n = s(e - 1) + a$$

$$e_n = \frac{s(e - 1) + a}{a}$$

$$n . \log e = \log[s(e - 1) + a] - \log a$$

$$n = \frac{\log[s(e - 1) + a] - \log a}{\log e}$$

Setzt man in diese Gleichung die für a, e und s gegebenen Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$n = \frac{\log[9198 (2 - 1) + 18] - \log 18}{\log 2}$$

$$n = \frac{\log 9216 - \log 18}{\log 2}$$

$$n = \frac{3,9645425 - 1,2552725}{0,3010300}$$

$$n = \frac{2,7092700}{0,3010300}$$

$n = 9$. Also kann der Spieler bei andauerndem Verluste nur 9 mal einsetzen.

24) Jemand gab an einem Tage 6 *M* und jeden folgenden Tag ein bestimmtes Vielfaches der Ausgabe des nächst vorhergehenden Tages aus. Auf diese Weise hatte er nach einigen Tagen 1530 *M* verausgabt. Wie groß ist die Zahl der Tage, wenn die Ausgabe am letzten Tage 768 *M* betrug?

Resultat. 8 Tage.

Anhang.

§. 70. Vermischte Aufgaben über die Logarithmen und Progressionen.*)

1) Es soll der Ausdruck:

$$\frac{1,07395^8 + 1,7\sqrt[5]{3,468}}{9 - \sqrt{49,35322}} = x$$

logarithmisch berechnet werden.

2) Wie heißt die Summe der Reihe:

$1102 + 1103 + 1104 + 1105 + \ldots . 17263$?

3) In einer arithmetischen Progression lautet das letzte Glied $8\frac{1}{6}$, die Differenz $\frac{1}{3}$ und die Summe der Glieder $101\frac{1}{2}$; wie viele Glieder zählt die Progression und wie heißt das Anfangsglied?

4) Wie viele Glieder hat eine geometrische Progression, in welcher das erste Glied $= 1\frac{1}{3}$, das letzte $= 3,804157$ und die Summe aller Glieder $= 28,512394$ ist?

5) In einer arithmetischen Progression ist die Summe des dritten und neunten Gliedes $= 18$, das Produkt des ersten und vierten Gliedes $= 16$; welches sind die ersten neun Glieder dieser Progression?

---

*) Die nachfolgenden Aufgaben Nr. 1 bis 10 wurden als Absolutorialaufgaben an den Gymnasien und Realschulen Bayerns gegeben.

6) Man bestimme x aus der Gleichung:

$$0{,}04^x \cdot \sqrt[5]{32768^{x+1}} = 3{,}2 \cdot \sqrt{2}$$

7) Die Summe der 3. Potenzen des 5. und 8. Gliedes einer steigenden arithmetischen Progression ist 2457; die Summe des 5. und 8. Gliedes 21; wie groß ist das 10. Glied und wie groß die Summe der ersten 20 Glieder?

8) Logarithmische Berechnung des Wertes von:

$$\sqrt{\frac{274{,}56^3 \sqrt[3]{0{,}0432}}{17524}} - \frac{24{,}4\sqrt[3]{27456\sqrt{137}}}{41200}$$

9) Es soll der numerische Wert von

$$2{,}013 + \sqrt[7]{0{,}08426}$$

berechnet werden.

10) Berechnung des Ausdruckes:

$$\left[\frac{8{,}435}{5{,}423}\right]^{-3{,}2} \cdot \sqrt[3]{\frac{0{,}02^{\frac{1}{5}} - (-2{,}3046)^{-4}}{\sqrt[5]{0{,}0342^2 - 1{,}3605^2}}}$$

11) Die Seiten von fünf Quadraten bilden eine steigende arithmetische Progression und sind zusammen 40 m lang. Die Summen der Inhalte des größten und kleinsten Quadrats ist um 10 qm kleiner als die Summe der Inhalte der drei anderen. Wie groß sind die Seiten und die Inhalte dieser fünf Quadrate?

12) Es läßt jemand einen Stein in eine Grube fallen und zählt 6 Sekunden bis der Schall des auf dem Grunde aufschlagenden Steines zu seinem Ohre gelangt. Wie tief ist dieselbe, wenn der Schall in jeder Sekunde 333 m zurücklegt und die Beschleunigung g der Schwere = 9,808 m ist?

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Fuß, Konrad,

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht

Bd.: 2

1884